Logik und Logikprogrammierung
10. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2023/24

Erinnerung letzte Vorlesung

Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Σ-Struktur, $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, φ Σ-Formel.
$\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ heißt „die Formel φ gilt unter der Belegung ρ in der Struktur $\mathcal{A}$“.

Definition

Sei Σ eine Signatur, φ eine Σ-Formel, Δ eine Menge von Σ-Formeln und $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur.

- $\mathcal{A} \models_\rho \Delta$ falls $\mathcal{A} \models_\rho \delta$ für alle $\delta \in \Delta$ gilt.
- $\mathcal{A} \models \varphi$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von φ) falls
  $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ für alle Variableninterpretationen ρ gilt.
- $\mathcal{A} \models \Delta$ falls $\mathcal{A} \models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$.
- Δ ist allgemeingültig, falls $\mathcal{B} \models_\rho \Delta$ für alle Σ-Strukturen $\mathcal{B}$ und alle Variableninterpretationen ρ gilt.
- Δ ist erfüllbar, wenn es Σ-Struktur $\mathcal{B}$ und Variableninterpretation $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{B}}$ gibt mit $\mathcal{B} \models_\rho \psi$ für alle $\psi \in \Delta$.

Definition

Sei Σ eine Signatur und Γ und Δ Mengen von Σ-Formeln.

- Δ ist semantische Folgerung von Γ ($\Gamma \models \Delta$), falls für alle Σ-Strukturen $\mathcal{B}$ und alle Variableninterpretationen $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{B}}$ gilt:

$$\mathcal{B} \models_\rho \Gamma \implies \mathcal{B} \models_\rho \Delta\,.$$

- Γ und Δ sind äquivalent ($\Gamma \equiv \Delta$), wenn $\Gamma \models \Delta$ und $\Delta \models \Gamma$ gelten.

Bemerkung

Für „$\{\varphi\}$ ist allgemeingültig“ sagen wir auch „φ ist allgemeingültig“, analog ist $\Gamma \models \varphi$ Vereinfachung von $\Gamma \models \{\varphi\}$ und $\alpha \equiv \beta$ bedeutet $\{\alpha\} \equiv \{\beta\}$.

Bemerkung

Für jede Formel φ gilt:
φ allgemeingültig gdw. $\{\neg\varphi\}$ nicht erfüllbar gdw. $\emptyset \models \varphi$ gdw. $\neg\bot \equiv \varphi$.

Beispiel

Für alle Formeln α und β und alle Variable x gelten

$$\forall x\,(\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x\,\alpha \wedge \forall x\,\beta \text{ und } \exists x\,(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x\,\alpha \vee \exists x\,\beta\,.$$

Beweis: hier nur $\forall x\,(\alpha \wedge \beta) \models \forall x\,\alpha \wedge \forall x\,\beta$ (andere Folgerungen analog):
Sei also $\mathcal{A}$ Σ-Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\,(\alpha \wedge \beta)$.
$\Longrightarrow$ für alle $a \in U_\mathcal{A}$ haben wir $\mathcal{A} \models_{\rho[x\mapsto a]} \alpha \wedge \beta$
$\Longrightarrow$ für alle $a \in U_\mathcal{A}$ gilt ($\mathcal{A} \models_{\rho[x\mapsto a]} \alpha$ und $\mathcal{A} \models_{\rho[x\mapsto a]} \beta$)
$\Longrightarrow$
- für alle $a \in U_\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A} \models_{\rho[x\mapsto a]} \alpha$ und
- für alle $a \in U_\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A} \models_{\rho[x\mapsto a]} \beta$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\,\alpha$ und $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\,\beta$
$\Longrightarrow$ $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\,\alpha \wedge \forall x\,\beta$ $\square$

Aufgabe

a: allgemeingültig e: erfüllbar

	a	e
$P(a)$		
$\exists x\colon (\neg P(x) \vee P(a))$		
$P(a) \to \exists x\colon P(x)$		
$P(x) \to \exists x\colon P(x)$		
$\forall x\colon P(x) \to \exists x\colon P(x)$		
$\forall x\colon P(x) \wedge \neg\forall y\colon P(y)$		
$\forall x\colon \big(Q(x,x) \to \exists x\,\forall y\colon Q(x,y)\big)$		
$\forall x\,\forall y\colon \big(x = y \to f(x) = f(y)\big)$		
$\forall x\,\forall y\colon \big(f(x) = f(y) \to x = y\big)$		
$\exists x\,\exists y\,\exists z\colon \big(f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z\big)$		
$\exists x\,\forall x\colon Q(x,x)$		

Substitutionen

Definition

Eine Substitution besteht aus einer Variable $x \in \mathrm{Var}$ und einem Term $t \in T_\Sigma$, geschrieben $[x := t]$.

Die Formel $\varphi[x := t]$ ist das Ergebnis der Anwendung der Substitution $[x := t]$ auf die Formel φ. Sie entsteht aus φ, indem alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden. *Sie soll das über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.*

Dazu definieren wir zunächst induktiv, was es heißt, die freien Vorkommen von x im Term $s \in T_\Sigma$ zu ersetzen:

- $x[x := t] = t$
- $y[x := t] = y$ für $y \in \mathrm{Var} \setminus \{x\}$
- $\big(f(t_1, \ldots, t_k)\big)[x := t] = f\big(t_1[x := t], \ldots, t_k[x := t]\big)$
  für $f \in \mathrm{Fun}$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$

Lemma

Seien Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Σ-Struktur, $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, $x \in \mathrm{Var}$ und $s, t \in T_{\Sigma}$. Dann gilt

$$\rho\big(s[x := t]\big) = \rho\big[x \mapsto \rho(t)\big](s)\,.$$

Beweis: Induktion über den Aufbau des Terms s (mit $\rho' = \rho[x \mapsto \rho(t)]$):

- $s = x$: $\rho\big(s[x := t]\big) = \rho(t) = \rho'(x) = \rho'(s)$
- $s \in \mathrm{Var} \setminus \{x\}$: $\rho\big(s[x := t]\big) = \rho(s) = \rho'(s)$
- $s = f(t_1, \ldots, t_k)$:

$$\begin{aligned}
\rho\Big(\big(f(t_1,\ldots,t_k)\big)[x := t]\Big) &= \rho\Big(f\big(t_1[x := t], \ldots, t_k[x := t]\big)\Big) \\
&= f^{\mathcal{A}}\Big(\rho\big(t_1[x := t]\big), \ldots, \rho\big(t_k[x := t]\big)\Big) \\
&\overset{\text{IV}}{=} f^{\mathcal{A}}\big(\rho'(t_1), \ldots, \rho'(t_k)\big) \\
&= \rho'\big(f(t_1, \ldots, t_k)\big) = \rho'(s)
\end{aligned}$$

$\square$

Die Definition von $s[x := t]$ kann induktiv auf Σ-Formeln fortgesetzt werden:

- $(t_1 = t_2)[x := t] = \big(t_1[x := t] = t_2[x := t]\big)$ für $t_1, t_2 \in T_\Sigma$
- $\big(R(t_1, \dots, t_k)\big)[x := t] = R\big(t_1[x := t], \dots, t_k[x := t]\big)$ für $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$
- $\bot[x := t] = \bot$

Für Σ-Formeln φ und ψ und $y \in \mathrm{Var}$:

- $(\varphi \oplus \psi)[x := t] = \varphi[x := t] \oplus \psi[x := t]$ für $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $(\neg\varphi)[x := t] = \neg\big(\varphi[x := t]\big)$
- $(Qy\,\varphi)[x := t] = \begin{cases} Qy\,\varphi[x := t] & \text{falls } x \neq y \\ Qy\,\varphi & \text{falls } x = y \end{cases}$ für $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Beispiel:

$$\Big(\exists x\, P\big(x, f(y)\big) \vee \neg\forall y\, Q\Big(y, g\big(a, h(z)\big)\Big)\Big)[y := f(u)]$$

$$= \Big(\exists x\, P\Big(x, f\big(f(u)\big)\Big) \vee \neg\forall y\, Q\Big(y, g\big(a, h(z)\big)\Big)\Big)$$

Folie 10.6: $\varphi[x := t]$ „soll das über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.“

Gegenbeispiel:

Aus der Formel

$$\exists y\, \text{Mutter}(x) = y \text{ („}x\text{ hat eine Mutter“)}$$

wird mit der Substitution $[x := \text{Vater}(y)]$ die Formel

$$\exists y\, \text{Mutter}\big(\text{Vater}(y)\big) = y$$

(„es gibt eine Person y, die Mutter ihres eigenen Vaters ist“).

Problem: Term $\text{Vater}(y)$ enthält Variable, die durch Substitution in den Wirkungsbereich des Quantors $\exists y$ gerät.

Definition

Sei $[x := t]$ Substitution und φ Σ-Formel.
Die Substitution $[x := t]$ heißt für φ zulässig, wenn

- φ atomar oder $\perp$ ist,
- φ die Form $\neg\alpha$ hat und $[x := t]$ für α zulässig ist,
- φ die Form $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ oder $\alpha \to \beta$ hat und $[x := t]$ für α und für β zulässig ist, oder
- φ die Form $\exists y\, \alpha$ oder $\forall y\, \alpha$ hat, so daß
    - $x = y$ oder
    - $x \notin FV(\alpha)$ oder
    - $y \notin FV(t)$ und $[x := t]$ ist für α zulässig.

Lemma

Sei Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Σ-Struktur, $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, $x \in \mathrm{Var}$ und $t \in T_{\Sigma}$.
Ist die Substitution $[x := t]$ für die Σ-Formel φ zulässig, so gilt

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi[x := t] \iff \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \varphi\,.$$

Beweis: siehe Zusatzmaterial auf Folien 10.31 ff. $\square$

Natürliches Schließen

Wir haben Regeln des natürlichen Schließens für aussagenlogische Formeln untersucht und für gut befunden. Man kann sie natürlich auch auf prädikatenlogische Formeln anwenden.

Beispiel

Für alle Σ-Formel φ und ψ gibt es eine Deduktion mit Hypothesen in $\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\}$ und Konklusion $\neg(\varphi \vee \psi)$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi \vee \psi]^2$}
\AxiomC{$\neg\varphi \wedge \neg\psi$}
\RightLabel{$(\wedge \mathrm{E}_1)$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\varphi]^1$}
\RightLabel{$(\neg \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$\neg\varphi \wedge \neg\psi$}
\RightLabel{$(\wedge \mathrm{E}_1)$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\AxiomC{$[\psi]^1$}
\RightLabel{$(\neg \mathrm{E})$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\vee \mathrm{E})^1$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg \mathrm{I})^2$}
\UnaryInfC{$\neg(\varphi \vee \psi)$}
\end{prooftree}
$$

Der Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen (vgl. Folie 3.13) kann ohne große Schwierigkeiten erweitert werden. Man erhält

Lemma

Sei Σ eine Signatur, Γ eine Menge von Σ-Formeln und φ eine Σ-Formel.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ, die die Regeln des natürlichen Schließens der Aussagenlogik verwendet. Dann gilt $\Gamma \models \varphi$.

Umgekehrt ist nicht zu erwarten, daß aus $\Gamma \models \varphi$ folgt, daß es eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ gibt, denn die bisher untersuchten Regeln erlauben keine Behandlung von $=$, $\forall$ bzw. $\exists$. Solche Regeln werden wir jetzt einführen.

Zunächst kümmern wir uns um Atomformeln der Form $t_1 = t_2$. Hierfür gibt es die zwei Regeln (R) und (GfG):

Reflexivität (ausführlich)

Für jeden Term t ist

$$\frac{}{t = t}$$

eine hypothesenlose Deduktion mit Konklusion $t = t$.

Reflexivität (Kurzform)

$$\frac{}{t = t}\,(\mathrm{R})$$

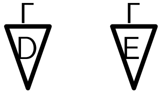
Gleiches-für-Gleiches in mathematischen Beweisen

„Zunächst zeige ich, daß s die Eigenschaft φ hat: ...
Jetzt zeige ich $s = t$: ...
Also haben wir gezeigt, daß t die Eigenschaft φ hat. qed“

Gleiches-für-Gleiches (ausführlich)

Seien s und t Terme und φ Formel, so daß die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig sind.

Sind D und E Deduktionen mit Hypothesen in Γ und Konklusionen $\varphi[x := s]$ bzw. $s = t$, so ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\varphi[x := t]$:



$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]}$$

Gleiches-für-Gleiches (Kurzform)

$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]}\,(\mathrm{GfG})$$

Bedingung: Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ sind für φ zulässig.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß wir bereits jetzt die üblichen Eigenschaften der Gleichheit (Symmetrie, Transitivität, Einsetzen) folgern können.

Beispiel

Seien x Variable, s Term ohne x und $\varphi = (x = s)$.

Da φ quantorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = (s = s)$ und $\varphi[x := t] = (t = s)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\dfrac{\dfrac{}{s = s}\,(\mathrm{R}) \qquad s = t}{t = s}\,(\mathrm{GfG})$$

Für alle Terme s und t haben wir also

$$\{s = t\} \vdash t = s\,.$$

Beispiel

Seien x Variable, r, s und t Terme ohne x und $\varphi = (r = x)$.

Da φ quantorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = (r = s)$ und $\varphi[x := t] = (r = t)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\frac{r = s \quad s = t}{r = t}\,(\mathrm{GfG})$$

Für alle Terme r, s und t haben wir also

$$\{r = s, s = t\} \vdash r = t\,.$$

Beispiel

Seien x Variable, s und t Terme ohne x, f einstelliges Funktionssymbol und $\varphi = \big(f(s) = f(x)\big)$.

Da φ quatorenfrei ist, sind die Substitutionen $[x := s]$ und $[x := t]$ für φ zulässig.

Außerdem gelten $\varphi[x := s] = \big(f(s) = f(s)\big)$ und $\varphi[x := t] = \big(f(s) = f(t)\big)$.

Also ist das folgende eine Deduktion:

$$\dfrac{\dfrac{}{f(s) = f(s)}\,(\mathrm{R}) \qquad s = t}{f(s) = f(t)}\,(\mathrm{GfG})$$

Für alle Terme s und t haben wir also

$$\{s = t\} \vdash f(s) = f(t)\,.$$

∀-Einführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „für alle x gilt φ“ sieht üblicherweise so aus:

> „Sei x beliebig, aber fest.
> Jetzt zeige ich φ (hier steckt die eigentliche Arbeit).
> Da x beliebig war, haben wir „für alle x gilt φ“ gezeigt. qed“

∀-Einführung (ausführlich)

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion φ und sei x eine Variable, die in keiner Formel aus Γ frei vorkommt.

Dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\forall x\, \varphi$:

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}$$

$\forall$-Einführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}\,(\forall\text{-I})$$

Bedingung: x kommt in keiner Hypothese frei vor

$\forall$-Elimination in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „t erfüllt φ“ kann so aussehen:

> „Zunächst zeige ich $\forall x\, \varphi$ (hier steckt die eigentliche Arbeit).
> Damit erfüllt insbesondere t die Aussage φ, d.h., wir haben
> „t erfüllt φ“ gezeigt. qed“

$\forall$-Elimination (ausführlich)

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\forall x\, \varphi$ und sei t Term, so daß Substitution $[x := t]$ für φ zulässig ist.

Dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\varphi[x := t]$:

$$\frac{\forall x\, \varphi}{\varphi[x := t]}$$

∀-Elimination (Kurzform)

$$\frac{\forall x\, \varphi}{\varphi[x := t]}\,(\forall\text{-E})$$

Bedingung: Substitution $[x := t]$ ist für φ zulässig.

$\exists$-Elimination in math. Beweisen

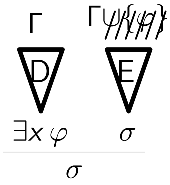
Ein Beweis von „σ gilt“ kann so aussehen:

> „Zunächst zeige ich $\exists x\, \varphi$ (hier steckt Arbeit).
> Jetzt zeige ich, daß σ immer gilt, wenn φ gilt (mehr Arbeit).
> Damit gilt σ. qed“

$\exists$-Elimination (ausführlich)

Sei Γ eine Menge von Formeln, die die Variable x nicht frei enthalten und enthalte die Formel σ die Variabel x nicht frei.

Wenn D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\exists x\, \varphi$ und E eine Deduktion mit Hypothesen in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und Konklusion σ ist, dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion σ:



∃-Elimination (Kurzform)

$$\dfrac{\exists x\, \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\ (\exists\text{-E})$$

Bedingung: x kommt in den Hypothesen und in σ nicht frei vor

$\exists$-Einführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „es gibt ein x, das φ erfüllt“ sieht üblicherweise so aus:

> „betrachte dieses t (hier ist Kreativität gefragt).
> Jetzt zeige ich, daß t φ erfüllt (u.U. harte Arbeit).
> Also haben wir „es gibt ein x, das φ erfüllt“ gezeigt. qed“

$\exists$-Einführung (ausführlich)

Sei die Substitution $[x := t]$ für die Formel φ zulässig.

Sei weiter D eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\varphi[x := t]$.

Dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in Γ und Konklusion $\exists x\, \varphi$:

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x\, \varphi}$$

$\exists$-Einführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x\, \varphi}\ (\exists\text{-I})$$

Bedingung: Substitution $[x := t]$ ist für φ zulässig.

Regeln des natürlichen Schließens III

$$\frac{}{t = t}\,(\mathrm{R})$$

$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]}\,(\mathrm{GfG})$$

(Substitution $[x := s]$ und $[x := t]$ sind für φ zulässig)

$$\frac{\varphi}{\forall x\, \varphi}\,(\forall\text{-I})$$

(x nicht frei in Hypothesen)

$$\frac{\forall x\, \varphi}{\varphi[x := t]}\,(\forall\text{-E})$$

(Substitution $[x := t]$ ist für φ zulässig)

Regeln des natürlichen Schließens IV

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x\, \varphi}\,(\exists\text{-I})$$

(Substitution $[x := t]$ ist für φ zulässig)

$$\frac{\exists x\, \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,(\exists\text{-E})$$

(x kommt in Hypothesen und σ nicht frei vor)

Zusammenfassung 10. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Substitutionen
- Erfüllbarkeit, semantische Folgerung, Allgemeingültigkeit (vgl. Vorlesung 3)
- natürliches Schließen für die Prädikatenlogik (vgl. Vorlesung 2)

kommende Vorlesung

- Korrektheit, Vollständigkeit, Konsequenzen daraus (vgl. Vorlesungen 3 und 4)

Zusatzmaterial

Beweis des Lemmas auf Folie 10.12: Induktion über den Aufbau der Formel φ (mit $\rho' = \rho\big[x \mapsto \rho(t)\big]$):

- $\varphi = (s_1 = s_2)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\rho (s_1 = s_2)[x := t] \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho s_1[x := t] = s_2[x := t] \\
&\iff \quad \rho\big(s_1[x := t]\big) = \rho\big(s_2[x := t]\big) \\
&\overset{(*)}{\iff} \quad \rho'(s_1) = \rho'(s_2) \\
&\iff \quad \mathcal{A} \models_{\rho'} s_1 = s_2
\end{aligned}
$$

  $(*)$ ... Folie 10.7

- andere atomare Formeln analog

- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\rho (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[x := t] \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho \varphi_1[x := t] \wedge \varphi_2[x := t] \\
&\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho \varphi_1[x := t] \\
&\qquad\quad \text{und } \mathcal{A} \models_\rho \varphi_2[x := t] \\
&\overset{(*)}{\iff} \quad \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_1 \text{ und } \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_2 \\
&\iff \quad \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi_1 \wedge \varphi_2
\end{aligned}$$

(*) nach IV da $[x := t]$ auch für φ_1 und φ_2 zulässig ist

- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ und $\varphi = \neg\psi$ analog

- $\varphi = \forall y\, \psi$:
  Wir betrachten zunächst den Fall $x = y$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho (\forall x\, \psi)[x := t] \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho \forall x\, \psi \\ &\iff \quad \mathcal{A} \models_{\rho'} \forall x\, \psi \text{ (denn } x \notin FV(\forall x\, \psi)) \end{aligned}$$

  Als nächstes der Fall $x \neq y$ und $x \notin FV(\psi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho (\forall y\, \psi)[x := t] \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho (\forall y\, \psi[x := t]) \\ &\iff \quad \mathcal{A} \models_\rho \forall y\, \psi \text{ (denn } x \notin FV(\psi)) \\ &\iff \quad \mathcal{A} \models_{\rho'} \forall y\, \psi \text{ (denn } x \notin FV(\forall x\, \psi)) \end{aligned}$$

Schließlich der Fall $x \neq y$, $x \in FV(\psi)$ und $y \notin FV(t)$:

Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ setze $\rho_a = \rho[y \mapsto a]$. Zunächst erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}
\rho_a[x \mapsto \rho_a(t)] & = & \rho_a\big[x \mapsto \rho(t)\big] \text{ da } y \text{ nicht in } t \text{ vorkommt} \\
 & = & \rho[y \mapsto a]\big[x \mapsto \rho(t)\big] \\
 & = & \rho\big[x \mapsto \rho(t)\big][y \mapsto a] \text{ da } x \neq y \\
 & = & \rho'[y \mapsto a]
\end{array}$$

Es ergibt sich

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \models_{\rho} (\forall y\, \psi)[x := t] & \iff & \mathcal{A} \models_{\rho} \forall y\, \big(\psi[x := t]\big) \text{ (wegen } x \neq y) \\
 & \iff & \mathcal{A} \models_{\rho_a} \psi[x := t] \text{ für alle } a \in U_{\mathcal{A}} \\
 & \overset{\text{IV}}{\iff} & \mathcal{A} \models_{\rho_a[x \mapsto \rho_a(t)]} \psi \text{ für alle } a \in U_{\mathcal{A}} \\
 & \overset{\text{s.o.}}{\iff} & \mathcal{A} \models_{\rho'[y \mapsto a]} \psi \text{ für alle } a \in U_{\mathcal{A}} \\
 & \iff & \mathcal{A} \models_{\rho'} \forall y\, \psi
\end{array}$$

- $\varphi = \exists y\, \psi$: analog $\square$