

# Logik und Logikprogrammierung

## 13. Vorlesung

Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2023/24

## Erinnerung

Eine **Klausel der Prädikatenlogik** ist eine Aussage der Form

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \bigvee_{1 \leq i \leq m} \lambda_i,$$

mit (prädikatenlogischen) Literalen  $\lambda_i$  und  $FV(\bigvee_{1 \leq i \leq m} \lambda_i) = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

## Schreib- und Sprechweise

$\Phi = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \setminus \{\perp\}$  für Klausel  $\varphi$

insbes.  $\emptyset$  bzw.  $\square$  für Klausel  $\perp$

Ist  $\sigma$  Substitution, so ist  $\Phi \sigma = \{\lambda_1 \sigma, \dots, \lambda_m \sigma\}$ .

# Prädikatenlogische Resolvente

Die Klausel  $\Psi$  heißt **prädikatenlogische Resolvente** der Klauseln  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , wenn es Substitutionen  $\rho_1, \rho_2, \sigma_0$ , natürliche Zahlen  $m, n \geq 1$  und Literale  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n$  gibt, so daß gilt

- 1  $\rho_1$  und  $\rho_2$  sind Variablenumbenennungen, so daß  $\Phi_1 \rho_1$  und  $\Phi_2 \rho_2$  keine gemeinsamen Variablen enthalten,
- 2  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Phi_1 \rho_1$  und  $\bar{\lambda}'_1, \dots, \bar{\lambda}'_n \in \Phi_2 \rho_2$ ,
- 3  $\sigma_0$  ist allgemeinsten Unifikator von  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}^2$  und
- 4  $\Psi = \left[ (\Phi_1 \rho_1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \setminus \{\bar{\lambda}'_1, \dots, \bar{\lambda}'_n\}) \right] \sigma_0$ .

## Beispiele für prädikatenlogische Resolventen

**Beispiel:** Seien  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  variablenlose Klauseln.

Bei der Bestimmung der Resolventen werden die Substitutionen auf Formeln aus  $\Phi_1$  und aus  $\Phi_2$  angewandt, sie haben also keinen Effekt und können daher vernachlässigt werden.

Eine Klausel  $\Psi$  ist also genau dann prädikatenlogische Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , wenn es ein Literal  $\lambda$  gibt mit

- 2  $\lambda \in \Phi_1$  und  $\bar{\lambda} \in \Phi_2$ ,
- 3  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_n =: \lambda$  und
- 4  $\Psi = \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}$ ,

d.h. wenn  $\Psi$  aussagenlogische Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  ist.

### Beispiel:

Wir betrachten  $\Phi_1 = \{P(f(x)), \neg R(x)\}$  und  $\Phi_2 = \{R(g(y)), R(z)\}$ .

Für die Variablenumbenennungen  $\rho_1 = \rho_2 = \text{id}$  haben die Klauseln  $\Phi_1 = \Phi_1 \rho_1$  und  $\Phi_2 = \Phi_2 \rho_2$  keine gemeinsamen Variablen.

Sei  $\lambda_1 = \neg R(x) \in \Phi_1 \rho_1$  und  $\lambda'_1 = \neg R(g(y))$ , also  $\overline{\lambda'_1} \in \Phi_2 \rho_2$ .

$\sigma_0 = [x := g(y)]$  ist ein allgemeinsten Unifikator von

$$\{\lambda_1, \lambda'_1\}^2 = \{\neg R(x), \neg R(g(y))\}^2.$$

Somit ist

$$\left[ (\Phi_1 \rho_1 \setminus \{\lambda_1\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \setminus \{\overline{\lambda'_1}\}) \right] \sigma_0 = \{P(f(g(y))), R(z)\}$$

eine Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .

Ihre Grundinstanzen sind die Klauseln  $\{P(f(g(t_1))), R(t_2)\}$  für variablenlose Terme  $t_1$  und  $t_2$  (vgl. Folie 12.10).

Seien jetzt  $\lambda_1 = \neg R(x) \in \Phi_1 \rho_1$ ,  
 $\lambda'_1 = \neg R(g(y))$  und  $\lambda'_2 = \neg R(z) \in \Phi_2 \rho_2$ , so daß  $\overline{\lambda'_1}, \overline{\lambda'_2} \in \Phi_2 \rho_2$ .

$\sigma_0 = [x := g(y)] [z := g(y)]$  ist ein allgemeinsten Unifikator von  
 $\{\lambda_1, \lambda'_1, \lambda'_2\}^2 = \{\neg R(x), \neg R(g(y)), \neg R(z)\}^2$ .

Somit ist

$$\left[ (\Phi_1 \rho_1 \setminus \{\lambda_1\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \setminus \{\overline{\lambda'_1}, \overline{\lambda'_2}\}) \right] \sigma_0 = \left\{ P(f(g(y))) \right\}$$

ebenfalls eine Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .

Ihre Grundinstanzen sind die Klauseln  $\left\{ P(f(g(t_1))) \right\}$  für einen  
variablenlosen Term  $t_1$  (vgl. Folie 12.10).

Seien schließlich  $\lambda_1 = \neg R(x) \in \Phi_1 \rho_1$  und  $\lambda'_1 = \neg R(z)$ , so daß  $\overline{\lambda'_1} \in \Phi_2 \rho_2$ .

$\sigma_0 = [x := z]$  ist ein allgemeinsten Unifikator von

$$\{\lambda_1, \lambda'_1\}^2 = \{\neg R(x), \neg R(z)\}^2.$$

Somit ist

$$\left[ (\Phi_1 \rho_1 \setminus \{\lambda_1\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \setminus \{\overline{\lambda'_1}\}) \right] \sigma_0 = \{P(f(z)), R(g(y))\}$$

ebenfalls eine Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .

Ihre Grundinstanzen sind die Klauseln  $\{P(f(t_2)), R(g(t_1))\}$  für variablenlose Terme  $t_1$  und  $t_2$  (vgl. Folie 12.10).

# Aufgabe

Haben diese Klauseln Resolventen?

Wieviele Resolventen gibt es (bis auf Variablenumbenennungen)?

$\Phi_1$	$\Phi_2$	# Resolventen
$\{P(x), Q(x, y)\}$	$\{\neg P(f(x))\}$	
$\{Q(g(x)), R(f(x))\}$	$\{\neg Q(f(x))\}$	
$\{P(x), P(f(x))\}$	$\{\neg P(y), Q(y, z)\}$	



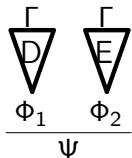
## Definition (vgl. Folie 6.3)

Sei  $\Gamma$  Klauselmengende der Prädikatenlogik und  $\Psi$  prädikatenlogische Klausel.

$\Psi$

ist **Resolutions-Ableitung** mit Hypothese  $\Psi$  und Konklusion  $\Psi$ .

Sind  $D$  und  $E$  Resolutions-Ableitungen von  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$  mit Hypothesen in  $\Gamma$  und ist  $\Psi$  eine prädikatenlogische Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , so ergibt sich die nebenstehende Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in  $\Gamma$  und Konklusion  $\Psi$ :



Wir schreiben  $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ , wenn es eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen aus  $\Gamma$  und Konklusion  $\Psi$  gibt. Wir sagen „ $\Psi$  ist eine **Resolutions-Folgerung** von  $\Gamma$ “.

Eine **Resolutions-Refutation** ist eine Resolutionsableitung mit Konklusion  $\square$ .

**Beispiel:** Betrachte die folgenden Klauseln:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x: (P(f(x)) \vee \neg R(x)) & \varphi_2 &= \forall y, z: (R(g(y)) \vee R(z)) \\ \psi &= \forall y, z: (P(f(g(y))) \vee R(z))\end{aligned}$$

bzw. (in anderer Schreibweise):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \{P(f(x)), \neg R(x)\} & \Phi_2 &= \{R(g(y)), R(z)\} \\ \Psi &= \{P(f(g(y))), R(z)\}\end{aligned}$$

Dann gilt  $\{\Phi_1, \Phi_2\} \vdash_{\text{Res}} \Psi$ .

Wir wollen  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$  zeigen.

Dazu seien  $\mathcal{A}$  und  $\rho$  beliebig mit  $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ .

Seien  $a, b \in U_{\mathcal{A}}$  beliebig.

Angenommen,  $b \notin R^{\mathcal{A}}$ .

Wegen  $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_2$  gilt  $\mathcal{A} \models_{\rho[y \mapsto a][z \mapsto b]} R(g(y)) \vee R(z)$ .

Also haben wir  $g^{\mathcal{A}}(a) \in R^{\mathcal{A}}$  oder  $b \in R^{\mathcal{A}}$ .

Da aber  $b \notin R^{\mathcal{A}}$  angenommen wurde, folgt  $g^{\mathcal{A}}(a) \in R^{\mathcal{A}}$ .

Wegen  $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_1$  gilt  $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto g^{\mathcal{A}}(a)]} P(f(x)) \vee \neg R(x)$ .

Also haben wir  $f^{\mathcal{A}}(g^{\mathcal{A}}(a)) \in P^{\mathcal{A}}$  oder  $g^{\mathcal{A}}(a) \notin R^{\mathcal{A}}$ .

Da wir  $g^{\mathcal{A}}(a) \in R^{\mathcal{A}}$  schon gezeigt haben, folgt  $f^{\mathcal{A}}(g^{\mathcal{A}}(a)) \in P^{\mathcal{A}}$ .

Damit haben wir gezeigt, daß  $f^{\mathcal{A}}(g^{\mathcal{A}}(a)) \in P^{\mathcal{A}}$  oder  $b \in R^{\mathcal{A}}$  gilt, d.h.  $\mathcal{A} \models_{\rho[y \mapsto a][z \mapsto b]} P(f(g(y))) \vee R(z)$ .

Da  $a$  und  $b$  beliebig waren, haben wir  $\mathcal{A} \models_{\rho} \psi$ .

Da  $\mathcal{A}$  und  $\rho$  beliebig waren mit  $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , haben wir  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$ , wie angestrebt.

Diese Argumentation kann man verallgemeinern und erhält

ist  $\Psi$  Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , so gilt  $\{\Phi_1, \Phi_2\} \models \Psi$ .

Per Induktion ergibt sich die Korrektheit der prädikatenlogischen Resolution:

### Lemma

Sei  $\Gamma$  Menge gleichungsloser Klauseln und  $\Phi$  gleichungslose Klausel mit  $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi$ . Dann gilt  $\Gamma \models \Phi$ .

Damit erhalten wir insbesondere

### Folgerung

Sei  $\Gamma$  Menge gleichungsloser Klauseln mit  $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$ . Dann ist  $\Gamma$  unerfüllbar.

Damit haben wir die Korrektheit des Resolutionskalküls für die Prädikatenlogik gezeigt. Um auch die Vollständigkeit, d.h. die umgekehrte Implikation, zu beweisen, gehen wir wie folgt vor:

Sei  $\Gamma$  Menge gleichungsloser Klauseln und  $G(\Gamma)$  die Menge ihrer Grundinstanzen. Dann gilt

$\Gamma$  unerfüllbar

$\implies G(\Gamma)$  hat kein Term-Modell (Folie 13.15)

$\implies G(\Gamma)$  im aussagenlogischen Sinne unerfüllbar

(Der Beweis des Satzes auf Folie 12.4 zeigt, daß jede im aussagenlogischen Sinne erfüllbare Menge variablen- und gleichungsloser Klauseln ein Term-Modell besitzt.)

$\implies G(\Gamma) \vdash_{\text{Res}} \square$  durch aussagenlogische Resolution (Folie 12.7)

$\implies G(\Gamma) \vdash_{\text{Res}} \square$  durch prädikatenlogische Resolution (Folie 13.4)

$\implies \Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$  (Folie 13.22).

# Term-Strukturen und Term-Modelle

Sei  $\Sigma = (\text{Fun}, \text{Rel}, \text{ar})$  eine Signatur. Wir nehmen im Folgenden an, daß  $\text{Fun}$  wenigstens ein Konstantensymbol enthält. Wir bezeichnen die Menge der variablenlosen Terme mit  $D(\Sigma)$ .

Eine  $\Sigma$ -Struktur  $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in \text{Fun}}, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \text{Rel}})$  heißt **Term-Struktur**, falls folgendes gilt:

- 1 das Universum  $U_{\mathcal{A}}$  ist die Menge  $D(\Sigma)$  der variablenlosen Terme,
- 2 für alle  $f \in \text{Fun}$  mit  $\text{ar}(f) = k$  und alle  $t_1, t_2, \dots, t_k \in D(\Sigma)$  ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, t_2, \dots, t_k) = f(t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Für jede Term-Struktur  $\mathcal{A}$ , alle Variableninterpretationen  $\rho$  und alle variablenfreien Terme  $t$  gilt dann  $\rho(t) = t$ .

Ein **Term-Modell** von  $\varphi$  ist eine **Term-Struktur**, die gleichzeitig ein Modell von  $\varphi$  ist.

## Lemma

Sei  $\Gamma$  eine Menge gleichungsloser Klauseln und  $G(\Gamma)$  die Menge ihrer Grundinstanzen.

Hat  $G(\Gamma)$  ein Term-Modell, so auch  $\Gamma$ .

### Beweis:

Sei  $\mathcal{A} = (D(\Sigma), (f^{\mathcal{A}})_{f \in \text{Fun}}, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \text{Rel}})$  ein Term-Modell von  $G(\Gamma)$ . Wir zeigen, daß  $\mathcal{A}$  auch ein Modell von  $\Gamma$  ist:

Sei also  $\gamma = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \in \Gamma$ .

Seien  $\rho$  eine Variableninterpretation und  $t_1, \dots, t_n \in D(\Sigma)$ .

Da die Terme  $t_i$  variablenlos sind, gilt

$$\begin{aligned}\rho' &:= \rho[x_1 \mapsto t_1][x_2 \mapsto t_2] \cdots [x_n \mapsto t_n] \\ &= \rho[x_n \mapsto t_n][x_{n-1} \mapsto t_{n-1}] \cdots [x_1 \mapsto t_1] \\ &= \rho[x_n \mapsto \rho(t_n)][x_{n-1} \mapsto \rho(t_{n-1})] \cdots [x_1 \mapsto \rho(t_1)]\end{aligned}$$

(die letzte Gleichung ergibt sich, da in jeder Termstruktur  $\rho(t) = t$  für alle variablenlosen Terme  $t$  gilt).

Wir erhalten

$$\varphi[x_n := t_n][x_{n-1} := t_{n-1}] \cdots [x_1 := t_1] \in G(\Gamma)$$

$$\implies \mathcal{A} \models_{\rho} \varphi[x_n := t_n][x_{n-1} := t_{n-1}] \cdots [x_1 := t_1]$$

$$\implies \mathcal{A} \models_{\rho'} \varphi \text{ (nach dem Lemma auf Folie 10.12)}$$

Da  $t_1, \dots, t_n \in D(\Sigma)$  beliebig waren, ergibt sich  $\mathcal{A} \models_{\rho} \gamma$ .

Da  $\rho$  beliebig war, haben wir  $\mathcal{A} \models \gamma$  gezeigt.

Da dies für alle  $\gamma \in \Gamma$  gilt, ist  $\mathcal{A}$  tatsächlich ein (Term-)Modell von  $\Gamma$ . □



## Lifting-Lemma

Seien  $\Phi_1, \Phi_2$  zwei gleichungslose Klauseln der Prädikatenlogik und seien  $\Phi'_1, \Phi'_2$  zwei Grundinstanzen hiervon, die **aussagenlogisch resolvierbar** sind und die Resolvente  $\Psi'$  haben.

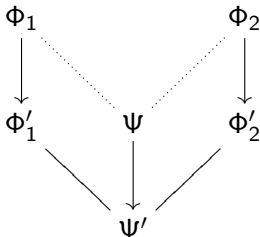
Dann gibt es eine **prädikatenlogische Resolvente**  $\Psi$  von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , so daß  $\Psi'$  eine Grundinstanz von  $\Psi$  ist.

Veranschaulichung des Liftig-Lemmas:

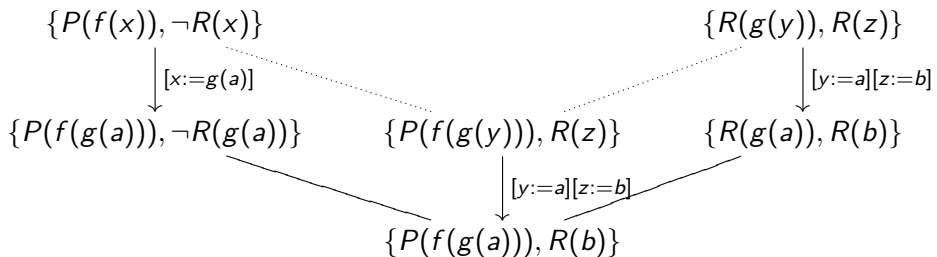
$\rightarrow$ : Substitution

$\text{---}$ : aussagenlogische  
Resolution

$\cdots$ : prädikatenlogische  
Resolution



## Beispiel:



## Beweis:

Seien  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Variablenumbenennungen, so daß  $\Phi_1 \rho_1$  und  $\Phi_2 \rho_2$  keine gemeinsamen Variablen haben.

Da  $\Phi'_i$  Grundinstanz von  $\Phi_i$  und  $\rho_i$  Variablenumbenennung ist, ist  $\Phi'_i$  auch Grundinstanz von  $\Phi_i \rho_i$ . Sei also  $\sigma_i$  eine Substitution mit  $\Phi'_i = \Phi_i \rho_i \sigma_i$ .

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $\text{Def}(\sigma_i)$  die Menge der in  $\Phi_i \rho_i$  vorkommenden Variablen ist. Hieraus folgt  $\text{Def}(\sigma_1) \cap \text{Def}(\sigma_2) = \emptyset$ .

Damit ist die folgende Substitution  $\sigma$  wohldefiniert:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1(x) & \text{falls } x \in \text{Def}(\sigma_1) \\ \sigma_2(x) & \text{falls } x \in \text{Def}(\sigma_2) \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt  $\Phi'_i = \Phi_i \rho_i \sigma_i = \Phi_i \rho_i \sigma$ .

Nach Voraussetzung ist  $\Psi'$  aussagenlogische Resolvente von  $\Phi'_1$  und  $\Phi'_2$ .

Also gibt es  $\lambda \in \Phi'_1$  und  $\bar{\lambda} \in \Phi'_2$  mit

$$\Psi' = (\Phi'_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\Phi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}).$$

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Phi_1 \rho_1$  und  $\bar{\lambda}'_1, \dots, \bar{\lambda}'_n \in \Phi_2 \rho_2$  diejenigen Literale, für die gilt:

$$\lambda = \lambda_1 \sigma = \dots = \lambda_m \sigma \text{ und } \bar{\lambda} = \bar{\lambda}'_1 \sigma = \dots = \bar{\lambda}'_n \sigma$$

(es gibt solche Literale wegen  $\lambda \in \Phi'_1 = \Phi_1 \rho_1 \sigma$  und  $\bar{\lambda} \in \Phi'_2 = \Phi_2 \rho_2 \sigma$ , also  $m, n \geq 1$ ).

Mit

$$\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n\}.$$

ist  $\sigma$  also ein Unifikator von  $\Lambda^2$ .

Sei  $\sigma_0$  ein allgemeinsten Unifikator von  $\Lambda^2$ . Dann ist

$$\Psi = \left( (\Phi_1 \rho_1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \setminus \{\bar{\lambda}'_1, \dots, \bar{\lambda}'_n\}) \right) \sigma_0$$

eine prädikatenlogische Resolvente von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .

Da  $\sigma_0$  allgemeinsten Unifikator von  $\Lambda^2$  und  $\sigma$  ein Unifikator von  $\Lambda^2$  ist, existiert eine Substitution  $\tau$  mit  $\sigma_0 \tau = \sigma$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \Psi' &= (\Phi'_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (\Phi'_2 \setminus \{\bar{\lambda}\}) \\ &= (\Phi_1 \rho_1 \sigma \setminus \{\lambda\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \sigma \setminus \{\bar{\lambda}\}) \\ &= (\Phi_1 \rho_1 \sigma \setminus \{\lambda_1 \sigma, \dots, \lambda_m \sigma\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \sigma \setminus \{\bar{\lambda}'_1 \sigma, \dots, \bar{\lambda}'_n \sigma\}) \\ &= \left( (\Phi_1 \rho_1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \setminus \{\bar{\lambda}'_1, \dots, \bar{\lambda}'_n\}) \right) \sigma \\ &= \left( (\Phi_1 \rho_1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}) \cup (\Phi_2 \rho_2 \setminus \{\bar{\lambda}'_1, \dots, \bar{\lambda}'_n\}) \right) \sigma_0 \tau \\ &= \Psi \tau \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß  $\Psi'$  eine Grundinstanz von  $\Psi$  ist. □

Durch Induktion über die Größe der Resolutions-Ableitung erhält man

## Lemma

Sei  $\Gamma$  eine Menge von gleichungslosen Klauseln der Prädikatenlogik,  $G(\Gamma)$  die Menge ihrer Grundinstanzen und  $\Psi'$  eine variablen- und gleichungslose Klausel mit  $G(\Gamma) \vdash_{\text{Res}} \Psi'$ .

Dann existiert eine gleichungslose Klausel  $\Psi$  mit  $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi$ , so daß  $\Psi'$  Grundinstanz von  $\Psi$  ist.

Ist  $\Gamma$  Menge von gleichungslosen Horn-Klauseln, so gilt obige Aussage analog für die Horn-Resolution  $\vdash_{\text{Horn}}$ .

Da nur  $\Psi' = \square$  Grundinstanz von  $\Psi = \square$  ist, erhalten wir:

## Folgerung

Sei  $\Gamma$  eine Menge von gleichungslosen Klauseln der Prädikatenlogik und  $G(\Gamma)$  die Menge ihrer Grundinstanzen mit  $G(\Gamma) \vdash_{\text{Res}} \square$ .

Dann gilt  $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$ .

Ist  $\Gamma$  Menge von gleichungslosen Horn-Klauseln, so gilt sogar  $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \square$ .

## Satz

Sei  $\Gamma$  Menge gleichungsfreier Klauseln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$$

Sind alle Klauseln in  $\Gamma$  sogar Hornklauseln, so haben wir

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\text{Horn}} \square$$

**Beweis:** Die Implikationen " $\Leftarrow$ " (d.h. die Korrektheit) ergeben sich aus der Folgerung auf Folie 13.12.

Der Beweis der Implikationen " $\Rightarrow$ " (d.h. die Vollständigkeit) folgt dem Plan auf Folie 13.13. □

# Zusammenfassung 13. Vorlesung

## in dieser Vorlesung neu

- prädikatenlogische Resolution:
  - Definition
  - Vollständigkeit und Korrektheit als Unerfüllbarkeitstest für Mengen gleichungsloser Klauseln
- Vollständigkeit und Korrektheit der Horn-Resolution als Unerfüllbarkeitstest für Mengen gleichungsloser Horn-Klauseln

## kommende (letzte) Vorlesung

- Unerfüllbarkeitstest für beliebige gleichungslose Formelmengen