Elimination von Gleichungen

Definition

Eine Σ-Formel ist gleichungsfrei, wenn sie keine Teilformel der Form $s = t$ enthält.

Ziel: Aus einer Σ-Formel φ soll eine erfüllbarkeitsäquivalente gleichungsfreie Formel φ' berechnet werden.

Bemerkung: Man kann i.a. keine äquivalente gleichungsfreie Formel φ' angeben, da es eine solche z.B. zu $\varphi = (\forall x \forall y \colon x = y)$ nicht gibt.

Idee: Die Formel φ' entsteht aus φ, indem alle Teilformeln der Form $x = y$ durch $\mathrm{Gl}(x, y)$ ersetzt werden, wobei Gl ein neues Relationssymbol ist.

Notationen

- Sei $\Sigma = (\mathrm{Fun}, \mathrm{Rel}, \mathrm{ar})$ endliche Signatur und φ Σ-Formel.
- $\Sigma_{\mathrm{Gl}} = \big(\mathrm{Fun}, \mathrm{Rel} \uplus \{\mathrm{Gl}\}, \mathrm{ar}_{\mathrm{Gl}}\big)$ mit $\mathrm{ar}_{\mathrm{Gl}}(f) = \mathrm{ar}(f)$ für alle $f \in \mathrm{Fun} \cup \mathrm{Rel}$ und $\mathrm{ar}_{\mathrm{Gl}}(\mathrm{Gl}) = 2$.
- Für eine Σ-Formel φ bezeichnet φ_{Gl} die Σ_{Gl}-Formel, die aus φ entsteht, indem alle Vorkommen von Teilformeln $s = t$ durch $\mathrm{Gl}(s, t)$ ersetzt werden.

Behauptung

φ erfüllbar $\Longrightarrow$ φ_{Gl} erfüllbar

Beweis φ erfüllbar

$\Longrightarrow$ es gibt Σ-Struktur $\mathcal{A}$ und Variableninterpretation ρ mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$

Wir definieren eine Σ_{Gl}-Struktur $\mathcal{B}$ wie folgt:

- $U_\mathcal{B} = U_\mathcal{A}$,
- $f^\mathcal{B} = f^\mathcal{A}$ für alle $f \in \mathrm{Fun}$,
- $R^\mathcal{B} = R^\mathcal{A}$ für alle $R \in \mathrm{Rel}$ und
- $\mathrm{Gl}^\mathcal{B} = \{(a, a) \mid a \in U_\mathcal{B}\}$, d.h. $\mathrm{Gl}^\mathcal{B}$ ist die Gleichheit auf $U_\mathcal{B}$.

Dann gilt offensichtlich

$$\mathcal{A} \models_\rho \varphi \iff \mathcal{B} \models_\rho \varphi_{\mathrm{Gl}} .$$

Also ist φ_{Gl} erfüllbar. $\square$

Behauptung

Es gilt nicht: φ erfüllbar $\Longleftarrow$ φ_{Gl} erfüllbar.

Beweis: Betrachte die Formel $\varphi = \exists x \, \neg(x = x)$, die offensichtlich unerfüllbar ist.

Dann ist aber $\varphi_{\mathrm{Gl}} = \exists x \, \neg \mathrm{Gl}(x, x)$. Sei $\mathcal{B}$ Σ_{Gl}-Struktur mit $\mathrm{Gl}^{\mathcal{B}} = \emptyset$. Dann gilt $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathrm{Gl}}$, also ist φ_{Gl} erfüllbar. $\square$

Ähnlich führen die folgenden Formeln zu einem Beweis dieser Behauptung:

- $\varphi = \exists x, y \, (x = y \land y \neq x)$ (wähle $\mathrm{Gl}^{\mathcal{B}}$ nicht symmetrisch)
- $\varphi = \exists x, y, z \, (x = y \land y = z \land x \neq z)$ (wähle $\mathrm{Gl}^{\mathcal{B}}$ nicht transitiv)
- $\varphi = \exists x, y \, \big(x = y \land f(x) \neq f(y)\big)$
- $\varphi = \exists x, y, z \big(x = y \land E(x, z) \land \neg E(y, z)\big)$

denn die Formel φ_{Gl} fordert nicht, daß $\mathrm{Gl}^{\mathcal{B}}$ eine „Kongruenz“ sei.

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur und $\sim$ eine binäre Relation auf $U_{\mathcal{A}}$. Die Relation $\sim$ heißt Kongruenz auf $\mathcal{A}$, wenn gilt:

- $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation (d.h. reflexiv, transitiv und symmetrisch)
- für alle $f \in \mathrm{Fun}$ mit $k = \mathrm{ar}(f)$ und alle $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ und alle $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ mit $a_1 \sim b_1, \ldots, a_k \sim b_k$ gilt
$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k) \sim f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_k)$$
- für alle $R \in \mathrm{Rel}$ mit $k = \mathrm{ar}(R)$ und alle $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ mit $a_1 \sim b_1, \ldots, a_k \sim b_k$ gilt
$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff (b_1, \ldots, b_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

Beispiel:

1. Ist $\mathcal{A}$ Struktur, so ist die Gleichheit $=$ eine Kongruenz auf $\mathcal{A}$.
2. Sei $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und für $a, b \in \mathbb{Z}$ gelte

$$a \sim b \iff |a - b| \text{ ist Vielfaches von } 17\,.$$

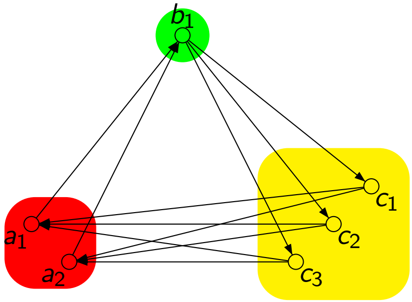
   Dann ist $\sim$ eine Kongruenz auf $\mathcal{Z}$.
3. Sei $U_{\mathcal{A}} = \{a_1, a_2, b_1, c_1, c_2, c_3\}$ und

$$E^{\mathcal{A}} = \big\{(a_i, b_1), (b_1, c_j), (c_j, a_i) \bigm| 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3\big\}\,.$$

   Dann ist die folgende Relation $\sim$ eine Kongruenz:

$$\big\{(a_i, a_j), (b_1, b_1), (c_k, c_\ell) \bigm| 1 \leq i, j \leq 2, 1 \leq k, \ell \leq 3\big\}\,.$$

Veranschaulichung des letzten Beispiels:

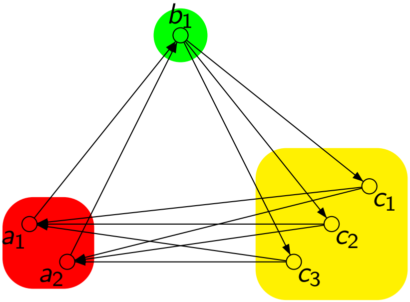


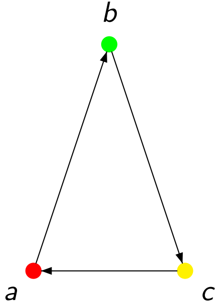
Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur und $\sim$ eine Kongruenz auf $\mathcal{A}$.

1. Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ sei $[a] = \{b \in U_{\mathcal{A}} \mid a \sim b\}$ die Äquivalenzklasse von a bzgl. $\sim$.
2. Dann definieren wir den Quotienten $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\sim$ von $\mathcal{A}$ bzgl. $\sim$ wie folgt:
   - $U_{\mathcal{B}} = U_{\mathcal{A}}/\sim = \{[a] \mid a \in U_{\mathcal{A}}\}$
   - Für jedes $f \in \mathrm{Fun}$ mit $\mathrm{ar}(f) = k$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in U_{\mathcal{A}}$ setzen wir
   $$f^{\mathcal{B}}([a_1], \ldots, [a_k]) = \left[f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k)\right].$$
   - Für jedes $R \in \mathrm{Rel}$ mit $\mathrm{ar}(R) = k$ setzen wir
   $$R^{\mathcal{B}} = \left\{([a_1], [a_2], \ldots, [a_k]) \mid (a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}\right\}.$$
3. Sei $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation. Dann definiere die Variableninterpretation
$$\rho/\sim\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{B}}\colon x \mapsto \left[\rho(x)\right].$$

Veranschaulichung am letzten Beispiel:





Lemma 1

Sei $\mathcal{A}$ Struktur, $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation und $\sim$ Kongruenz. Seien weiter $\mathcal{B} = \mathcal{A}/{\sim}$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho/{\sim}$. Dann gilt für jeden Term t:

$$\big[\rho(t)\big] = \rho_{\mathcal{B}}(t)\,.$$

Beweis: per Induktion über den Aufbau des Terms t:
I.A. $t = x$ ist Variable. Dann gilt

$$\big[\rho(t)\big] = \big[\rho(x)\big] = \rho_{\mathcal{B}}(x) = \rho_{\mathcal{B}}(t)$$

nach Definition der Variableninterpretation $\rho_{\mathcal{B}}$.
I.S. Sei $t = f(t_1, \ldots, t_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\big[\rho(t)\big] &= \Big[f^{\mathcal{A}}\big(\rho(t_1), \ldots, \rho(t_k)\big)\Big] \\ &= f^{\mathcal{B}}\Big(\big[\rho(t_1)\big], \ldots, \big[\rho(t_k)\big]\Big) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} f^{\mathcal{B}}\big(\rho_{\mathcal{B}}(t_1), \ldots, \rho_{\mathcal{B}}(t_k)\big) = \rho_{\mathcal{B}}(t)\,.\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2

Sei $\mathcal{A}$ Σ-Struktur, $\sim$ Kongruenz und $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\!\sim$. Dann gilt für alle $R \in \mathrm{Rel}$ mit $k = \mathrm{ar}(R)$ und alle $c_1, \ldots, c_k \in U_{\mathcal{A}}$:

$$([c_1], [c_2], \ldots, [c_k]) \in R^{\mathcal{B}} \iff (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in R^{\mathcal{A}} .$$

Beweis:

„$\Leftarrow$“: klar nach Definition von $R^{\mathcal{B}}$

„$\Rightarrow$“: Sei $([c_1], \ldots, [c_k]) \in R^{\mathcal{B}}$

$\Longrightarrow$ es gibt $(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}$ mit $([a_1], \ldots, [a_k]) = ([c_1], \ldots, [c_k])$

$\Longrightarrow$ $a_1 \sim c_1, \ \ldots, \ a_k \sim c_k$

$\Longrightarrow$ $(c_1, \ldots, c_k) \in R^{\mathcal{A}}$, da $\sim$ Kongruenz ist. $\square$

Satz

Seien $\mathcal{A}$ Σ_{Gl}-Struktur und $\rho\colon \mathrm{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, so daß $\sim\, = \mathrm{Gl}^{\mathcal{A}}$ Kongruenz auf $\mathcal{A}$ ist.

Seien $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\!\sim$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho/\!\sim$.

Dann gilt für alle Σ-Formeln φ:

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{\mathrm{Gl}} \iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi\,.$$

Beweis: per Induktion über den Aufbau der Formel φ.

I.A. φ ist atomare Formel:

- $\varphi = R(t_1, \ldots, t_k)$ für Terme $t_1, \ldots, t_k$. Dann gelten $\varphi = \varphi_{\mathrm{Gl}}$ und

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{\mathrm{Gl}} \quad &\iff \quad (\rho(t_1), \ldots, \rho(t_k)) \in R^{\mathcal{A}} \\
&\iff \quad \Big(\big[\rho(t_1)\big], \ldots, \big[\rho(t_k)\big]\Big) \in R^{\mathcal{B}} \text{ (Lemma 2)} \\
&\iff \quad (\rho_{\mathcal{B}}(t_1), \ldots, \rho_{\mathcal{B}}(t_k)) \in R^{\mathcal{B}} \text{ (Lemma 1)} \\
&\iff \quad \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi
\end{aligned}$$

- $\varphi = (s = t)$ für Terme s und t und damit $\varphi_{\mathrm{Gl}} = \mathrm{Gl}(s, t)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho \varphi_{\mathrm{Gl}} &\iff \big(\rho(s), \rho(t)\big) \in \mathrm{Gl}^{\mathcal{A}} \\ &\iff \rho(s) \sim \rho(t) \\ &\iff \big[\rho(s)\big] = \big[\rho(t)\big] \\ &\iff \rho_{\mathcal{B}}(s) = \rho_{\mathcal{B}}(t) \\ &\iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi \end{aligned}$$

I.S.

- $\varphi = \alpha \wedge \beta$: Dann gilt $\varphi_{\mathrm{Gl}} = \alpha_{\mathrm{Gl}} \wedge \beta_{\mathrm{Gl}}$ und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models_\rho \varphi_{\mathrm{Gl}} &\iff \mathcal{A} \models_\rho \alpha_{\mathrm{Gl}} \text{ und } \mathcal{A} \models_\rho \beta_{\mathrm{Gl}} \\ &\overset{\text{IV}}{\iff} \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \beta \\ &\iff \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi \end{aligned}$$

- $\varphi = \alpha \vee \beta$: analog
- $\varphi = \alpha \to \beta$: analog
- $\varphi = \neg\alpha$: analog

- $\varphi = \exists x\, \alpha$: Dann gilt $\varphi_{\mathrm{Gl}} = \exists x\, \alpha_{\mathrm{Gl}}$ und damit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \models_\rho \varphi_{\mathrm{Gl}} \quad &\iff \quad \text{es gibt } a \in U_\mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \alpha_{\mathrm{Gl}} \\
&\stackrel{\text{IV}}{\iff} \quad \text{es gibt } a \in U_\mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{B} \models_{(\rho[x \mapsto a])/\sim} \alpha \\
&\iff \quad \text{es gibt } a \in U_\mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}[x \mapsto [a]]} \alpha \\
& \quad \left(\text{denn } \big(\rho[x \mapsto a]\big)/\sim\, = \rho_\mathcal{B}\big[x \mapsto [a]\big]\right) \\
&\iff \quad \text{es gibt } b \in U_\mathcal{B} \text{ mit } \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}[x \mapsto b]} \alpha \\
&\iff \quad \mathcal{B} \models_{\rho_\mathcal{B}} \varphi
\end{aligned}
$$

- $F = \forall x\, \alpha$: analog. $\square$

Lemma

Aus einer endlichen Signatur Σ kann eine gleichungsfreie Horn-Formel ohne freie Variabel Kong_Σ über Σ_{Gl} berechnet werden, so daß für alle Σ_{Gl}-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \mathrm{Kong}_\Sigma \iff \mathrm{Gl}^{\mathcal{A}} \text{ ist eine Kongruenz}.$$

Beweis:

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x\colon \mathrm{Gl}(x,x) \wedge \forall x,y\colon \big(\mathrm{Gl}(x,y) \to \mathrm{Gl}(y,x)\big) \\
\wedge & \forall x,y,z\colon \big(\mathrm{Gl}(x,y) \wedge \mathrm{Gl}(y,z) \to \mathrm{Gl}(x,z)\big) \\
\wedge & \displaystyle\bigwedge_{f\in\mathrm{Fun}} \forall\vec{x},\vec{y}\colon \left(\left(\bigwedge_{1\le i\le \mathrm{ar}(f)} \mathrm{Gl}(x_i,y_i)\right) \to \mathrm{Gl}\big(f(\vec{x}), f(\vec{y})\big)\right) \\
\wedge & \displaystyle\bigwedge_{R\in\mathrm{Rel}} \forall\vec{x},\vec{y}\colon \left(\left(\bigwedge_{1\le i\le \mathrm{ar}(R)} \mathrm{Gl}(x_i,y_i)\right) \to \big(R(\vec{x}) \leftrightarrow R(\vec{y})\big)\right)
\end{array}$$

□

Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Σ-Formel φ kann eine gleichungsfreie und erfüllbarkeitsäquivalente Σ_{Gl}-Formel φ' berechnet werden.

Ist φ Horn-Formel, so ist auch φ' Horn-Formel.

Beweis:
Setze $\varphi' = \varphi_{\mathrm{Gl}} \wedge \mathrm{Kong}_{\Sigma}$.
wir zeigen: φ erfüllbar $\iff$ φ' erfüllbar

„$\Rightarrow$“: Seien $\mathcal{A}$ Σ-Strukur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$. Sei $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, =)$ die auf Folie 15.3 konstruierte Σ_{Gl}-Struktur. Dann gilt offensichtlich $\mathcal{B} \models_\rho \varphi_{\mathrm{Gl}} \wedge \mathrm{Kong}_{\Sigma}$, d.h. φ' ist erfüllbar.

„$\Leftarrow$“: Seien $\mathcal{A}$ Σ_{Gl}-Struktur und ρ Variableninterpretation mit $\mathcal{A} \models_\rho \varphi'$

$\Longrightarrow \mathrm{Gl}^{\mathcal{A}} =: \sim$ ist Kongruenz auf $\mathcal{A}$ (Lemma auf Folie 15.15)

$\Longrightarrow \mathcal{A}/{\sim} \models_{\rho/\sim} \varphi$ (Satz auf Folie 15.12)

Also ist φ erfüllbar. $\square$

Zusammenfassung 15. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- 1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz
- Vereinfachung von Formeln: Gleichungsfreiheit

kommende Vorlesung

- weitere Vereinfachung von Formeln: Pränexform und Skolemform
- Herbrand-Modelle