TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 2

Abgabe bis zum 20. Oktober um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1

Auf einer wissenschaftlichen Konferenz entbrennt eine Diskussion zwischen den Teilnehmern A, B, C, D und E. Jeder der fünf Wissenschaftler hat eine Behauptung formuliert und diese soeben den anderen vorgestellt. Die folgenden Kommentare wurden geäußert und von allen Teilnehmern als richtig anerkannt:

(a) E: "Wenn C recht hat, dann stimme ich B zu, unabhängig davon, was D sagt."
(b) B: "E verwendet in seiner Argumentation Ergebnisse sowohl von A, als auch von C. Ich kann der Aussage von E also nur vertrauen, wenn keiner der beiden einen Fehler gemacht hat."
(c) A: "Meine Ergebnisse widerlegen D's Vermutung."
(d) C: "Wenn es stimmt, was A sagt, dann können B und D nicht beide falsch liegen."
(e) A: "Das Ergebnis von B ist allgemeiner als das von D."
(f) E: "C und D widersprechen sich gegenseitig."
(g) B: "C's Behauptung macht nur Sinn, wenn wir annehmen, dass E falsch liegt."
(h) D: "A und B haben nicht beide Unrecht."

Formalisieren Sie die gegebenen Aussagen durch eine Menge aussagenlogischer Formeln Γ. Verwenden Sie atomare Formeln $X \in \{A, B, C, D, E\}$ mit der Bedeutung: "Die Behauptung von Wissenschaftler X ist korrekt".
Zeigen Sie, dass unter den obigen Annahmen der Wissenschaftler A einen Fehler gemacht haben muss, indem Sie eine Deduktion für $\Gamma \vdash \neg A$ angeben[1].

Zusatz: Prüfen Sie, welche der Wissenschaftler B, C, D und E recht haben, und welche nicht (je durch Angabe einer geeigneten Deduktion).

Aufgabe 2 (Majorität)*

2 Punkte

Wir erweitern in dieser Aufgabe die Aussagenlogik um den dreistelligen Operator $\mathsf{maj}(\cdot,\cdot,\cdot)$ (Majorität, "wenigstens zwei der drei Argumente sind wahr").
Überlegen Sie sich dazu, wie Sie eine Aussage *"wenigstens zwei der Formeln φ, ψ, χ gelten"* beweisen bzw. in einem Beweis verwenden würden und geben Sie entsprechende Regeln (maj-I) und (maj-E) an (ggf. mit verschiedenen Fällen, ähnlich wie etwa bei der Konjunktionselimination).

[1] I.d.R. gibt es mehrere Möglichkeiten, eine Aussage in die Logik zu übersetzen. Wenn Sie Schwierigkeiten beim Erstellen der Deduktionen haben, könnte es hilfreich sein, andere Formeln zu wählen. Z.B. ist $\neg\varphi \vee \neg\psi$ einfacher zu verwenden als $\neg(\varphi \wedge \psi)$.

Aufgabe 3* 2+3+4+1 Punkte

Wir möchten in dieser Aufgabe das Distributivgesetz “$(\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi) = \varphi \land (\psi \lor \chi)$” zeigen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie $\{\ \varphi \land (\psi \lor \chi)\ \} \vdash (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)$ indem Sie die folgende Deduktion vervollständigen:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \land (\psi \lor \chi)}{\square}\,(\land E_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\square}{\varphi}\,(\land E_1) \quad \psi}{\square}\,(\square)}{(\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)}\,(\square) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\square}{\varphi}\,(\land E_1) \quad \chi}{\square}\,(\square)}{(\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)}\,(\square)}{\square}\,(\lor E)$$

(b) Geben Sie eine Deduktion D_1 für $\{\ (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)\ \} \vdash \varphi$ an.

(c) Geben Sie eine Deduktion D_2 für $\{\ (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)\ \} \vdash \psi \lor \chi$ an.

(d) Folgern Sie aus (b) und (c), dass $\{\ (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)\ \} \vdash \varphi \land (\psi \lor \chi)$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen D_1 und D_2 in Aufgabe (d) verwenden, ohne (b) oder (c) bearbeitet zu haben.

Aufgabe 4* 3 Punkte

In Aufgabe 1 des ersten Übungsblattes haben wir Aussagen der natürlichen Sprache durch folgende Formeln formalisiert:

$$G \longrightarrow F \qquad (R \lor O) \land \neg(R \land O) \qquad \neg R \lor \neg S \qquad O \longrightarrow G$$

Geben Sie eine formale Deduktion mit Konklusion $(\neg R) \longrightarrow G$ an, welche ausschließlich diese Formeln als Hypothesen nutzt (alle anderen Hypothesen sind gestrichen).

Aufgabe 5 (Semantik von Formeln)

Seien p und q atomare Formeln. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{B}\big(\ (p \lor q) \longrightarrow p\ \big)$ für die Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(p) = 0$ und $\mathcal{B}(q) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\big\{(p \lor q) \longrightarrow p\big\} \models q \longrightarrow p$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\big\{(p \lor q) \longrightarrow p\big\} \not\models p$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $q \lor \big((p \lor q) \longrightarrow p\big)$ eine Tautologie ist.