

Logik und Logikprogrammierung – Übung 3

Abgabe bis zum 27. Oktober um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1*

1+1+2+2 Punkte

Seien p, q, r paarweise verschiedene atomare Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- (a) $\{ p \rightarrow p \} \models p$
- (b) $\{ p \rightarrow q, \neg q \} \models \neg p$
- (c) $\{ p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vee \neg r \} \models p \rightarrow r$
- (d) $\{ p \vee \neg q, \neg(q \rightarrow p) \} \models r$

Aufgabe 2*

1+1+2+2 Punkte

Seien p, q, r paarweise verschiedene atomare Formeln. Entscheiden Sie, welche der folgenden Formeln Tautologien sind und begründen Sie Ihre Behauptung:

- (a) $\perp \rightarrow p$
- (b) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- (d) $p \vee \neg(p \vee q \vee (\neg q \wedge r))$
- (e) **(Diese Teilaufgabe wird nicht bewertet)** $\text{maj}(p \rightarrow q, p \vee q, \neg q)$ ¹

Aufgabe 3*

3 Punkte

Geben Sie für das Korrektheitslemma (Folien 3.13ff) den Induktionsschritt für den Fall (\rightarrow E) an.

Aufgabe 4

In Aufgabe 4 des ersten Übungsblattes haben wir den Operator $\varphi ? \psi : \chi$ ("falls φ dann ψ , sonst χ ") eingeführt und das natürliche Schließen um die folgenden Ableitungsregeln erweitert:

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi ? \psi : \chi} \text{ (if-I)} \quad \frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\varphi ? \psi : \chi} \text{ (if-I)} \quad \frac{\varphi ? \psi : \chi \quad \varphi}{\psi} \text{ (if-E}_1) \quad \text{und} \quad \frac{\varphi ? \psi : \chi \quad \neg\varphi}{\chi} \text{ (if-E}_2).$$

Geben Sie analog zu Folie 3.3 die Semantik des Operators an und erweitern Sie den Induktionsschritt des Korrektheitslemmas um den Fall (if-I).

Zusatz. Betrachten Sie auch die Fälle (if-E₁) und (if-E₂).

Aufgabe 5

Zeigen Sie das Distributivgesetz " $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi = (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$ ", d.h., geben Sie je eine Deduktion für

$$\{ (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \} \vdash \varphi \rightarrow \chi \quad \text{und für} \quad \{ \varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi \} \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$$

an.

¹Die dreistellige Operation maj bezeichnet dabei die Majorität, vgl. Aufgabe 2 von Übungsblatt 2.