TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

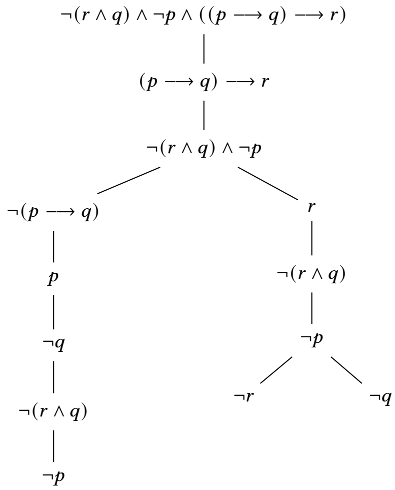
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 4

Abgabe bis zum 03. November um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1

Gegeben sei das nachfolgende Tableau T. Kennzeichnen Sie die verwendeten Regeln und entscheiden Sie, ob T geschlossen und/oder vollständig expandiert ist. Ist $\neg(r \land q) \land \neg p \land ((p \longrightarrow q) \longrightarrow r)$ erfüllbar?



Aufgabe 2*

2+2+2 Punkte

Seien p, q, r, s paarweise verschiedene atomare Formeln. Entscheiden Sie mithilfe des Tableau-Kalküls (Folien 5.6ff, 5.14), ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind. Geben Sie gegebenenfalls eine erfüllende Belegung an.

(a) $\neg(p \lor \neg q) \land \big((q \land r) \longrightarrow p\big) \land (r \lor \neg p)$ ist unerfüllbar

(b) $\big\{\ p \longrightarrow (q \land \neg r),\ q \longrightarrow \neg s,\ p \land (r \lor s)\ \big\}$ ist unerfüllbar

(c) $\big\{\ \neg p \lor q,\ \neg(r \longrightarrow q),\ (s \land r) \longrightarrow p\ \big\} \models \neg s$

Aufgabe 3*

3 Punkte

Zeigen Sie

$$\big\{\ (p \lor \neg q) \land (\neg p \lor q)\ \big\} \vdash (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$

durch Angabe einer geeigneten Deduktion.

Aufgabe 4*

2+2 Punkte

Zeigen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel φ eine Formel φ' gibt, welche ausschließlich den Operator "$\longrightarrow$" verwendet und für welche $\mathcal{B}(\varphi') = \mathcal{B}(\varphi)$ für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

Gibt es eine Formel, welche ausschließlich atomare Formeln und "$\longrightarrow$" verwendet (isb. also nicht $\perp$) und unter jeder passenden Belegung zu 0 ausgewertet wird? (Beweisen Sie Ihre Behauptung)

Aufgabe 5* 2 Punkte

Sei $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ die Menge aller atomaren Formeln. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Für jedes $Q \subseteq P$ gibt es eine maximal konsistente Menge Δ mit $\Delta \cap P = Q$.

(b) (Diese Teilaufgabe wird nicht bewertet) Sind Δ und Δ' zwei maximal konsistente Mengen mit $p \in \Delta$ gdw. $p \in \Delta'$ für alle $p \in P$, so gilt $\Delta = \Delta'$.

Hinweis. Verwenden Sie die erfüllende Belegung für Δ von Folie 4.2 aus der Vorlesung.

(c) (Diese Teilaufgabe wird nicht bewertet) Es gibt überabzählbar viele maximal konsistente Mengen.

Hinweis. Verwenden Sie die Teilaufgaben (a) und (b) um zu zeigen, dass es eine Bijektion zwischen den Teilmengen von P und den maximal konsistenten Mengen gibt.