**TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik**
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
**ILMENAU**

# Logik und Logikprogrammierung – Übung 5

Abgabe bis zum 10. November um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

## Aufgabe 1* 

1+1 Punkte

Leiten Sie unter Verwendung der Äquivalenzen auf Folien 6.16f die folgenden Zusammenhänge her:

(a) $\varphi \longrightarrow \psi \equiv \neg\psi \longrightarrow \neg\varphi$
(b) $\varphi \vee \neg\bot \equiv \neg\bot$
(c) (Diese Teilaufgabe wird nicht bewertet) $\varphi \wedge \neg\bot \equiv \varphi$
(d) (Diese Teilaufgabe wird nicht bewertet) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$

## Aufgabe 2*

2+2 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe erneut die Operation $\mathsf{maj}(\varphi, \psi, \chi)$ ("Majorität") aus Aufgabe 2 des zweiten Übungsblattes. Erweitern Sie den Tableau-Kalkül um zwei Regeln für $\mathsf{maj}(\varphi, \psi, \chi)$ bzw. $\neg\mathsf{maj}(\varphi, \psi, \chi)$. Verwenden Sie die Notation von Folie 5.6.

Verwenden Sie Ihre Regeln um zu zeigen, dass $\mathsf{maj}(p \longrightarrow q, p \vee q, \neg q)$ eine Tautologie ist.

## Aufgabe 3*

1+1 Punkte

Gegeben sei die Klauselmenge $\Gamma = \{p \vee s,\ \neg s \vee \bot \vee \neg r,\ r \vee p \vee q,\ \neg p \vee q,\ \neg q \vee r \vee \bot,\ s \vee q\}$.

(a) Geben Sie eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen aus $\Gamma$ und Konklusion $p$ an.

(b) Verwenden Sie den Resolutions-Kalkül um zu prüfen, ob $\Gamma \cup \{s\}$ unerfüllbar ist. Gilt $\Gamma \models \neg s$?

*Hinweis.* Sie dürfen Teilaufgabe (a) verwenden, ohne diese bearbeitet zu haben.

## Aufgabe 4

Zeigen Sie

$$\{\, p \vee (\neg p \wedge q),\ q \longrightarrow r \,\} \vdash \neg p \longrightarrow r$$

durch Angabe einer geeigneten Deduktion.

**Aufgabe 5***  1+1+2+3 Punkte

Für eine endliche Menge $P$ von atomaren Formeln sei $n(P)$ die Anzahl der paarweise nicht äquivalenten aussagenlogischen Formeln mit atomaren Formeln aus $P$. Zum Beispiel sind für eine einelementige Menge $P = \{p\}$ die Formeln $p$, $\neg p$, $\perp$ und $\neg\perp$ paarweise nicht äquivalent. Jede weitere Formel enthält entweder eine zusätzliche atomare Formel verschieden von $p$ oder ist äquivalent zu einer der obigen vier Formeln – d.h. $n(\{p\}) = 4$. Wir möchten in dieser Aufgabe den genauen Wert von $n(P)$ bestimmen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, welche unter einer passenden Belegung $\mathcal{B}$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(q) = 1$ und $\mathcal{B}(r) = 0$ ist.

(b) Gegeben sei die folgende Wahrheitswertetabelle:

| $\mathcal{B}(p)$ | $\mathcal{B}(q)$ | $\mathcal{B}(r)$ | $*$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Geben Sie eine Formel an, deren Wahrheitswerteverlauf dem von Spalte $*$ entspricht.

(c) Sei $k \geq 0$ eine natürliche Zahl und $f : \{0,1\}^k \longrightarrow \{0,1\}$ eine Abbildung. Geben Sie eine Formel $\varphi_f$ an, welche ausschließlich die atomaren Formeln $p_1, p_2, \ldots, p_k$ verwendet und für welche

$$\mathcal{B}(\varphi_f) = f\big(\mathcal{B}(p_1), \mathcal{B}(p_2), \ldots, \mathcal{B}(p_k)\big)$$

für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

*Hinweis:* Die Tabelle aus Aufgabenteil (b) kann als Funktion $f : \{0,1\}^3 \longrightarrow \{0,1\}$ aufgefasst werden (mit $f(0,0,0) = 1$, $f(0,0,1) = 0$, usw.).

(d) Bestimmen Sie $n(P)$.