TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

Logik und Logikprogrammierung – Übung 6

Abgabe bis zum 17. November um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Formelmenge

$$\left\{\, r \longrightarrow q,\ (p \wedge s) \vee (r \wedge s),\ (q \wedge r) \longrightarrow \bot,\ (s \wedge q) \longrightarrow p,\ \neg r \longrightarrow \neg s \right\}.$$

Geben Sie eine äquivalente[1] Menge Γ von Klauseln an und zeigen Sie mithilfe des Resolutions-Kalküls, dass $\Gamma \models p \vee t$ gilt.

Aufgabe 2*

4 Punkte

Gegeben sei die Menge $\Gamma = \left\{\ (q \wedge r) \longrightarrow p,\ \neg s \vee q,\ r,\ (q \wedge s) \longrightarrow p\ \right\}$ von Formeln. Geben Sie eine zu Γ äquivalente[1] Menge Γ' von Hornklauseln an und prüfen Sie mithilfe des Resolutions-Kalküls, ob $\Gamma \models p$ bzw. $\Gamma \models s \longrightarrow p$ gilt. Sind Ihre Resolutions-Ableitungen auch Horn-Ableitungen?

Aufgabe 3

Gegeben sei die geordnete Menge $\Gamma = \big\{(\neg p, \neg q, \neg r),\ (p, \neg s),\ (p, \neg q),\ (q, \neg r),\ (r), (s, \neg p)\big\}$ von Hornklauseln (wir fassen Klauseln hier als Tupel auf, vgl. Folie 7.28). Geben Sie eine Horn-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion $\Box$ an. Gibt es auch eine SLD-Resolution mit Hypothesen aus Γ und Konklusion $\Box$?

Aufgabe 4*

5 Punkte

Gegeben sei die folgende Resolutions-Refutation:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{\neg p,\neg r,\neg s\} \quad \cfrac{\{p,\neg s\}\quad\{s,\neg q\}}{\{p,\neg q\}}}{\{\neg q,\neg r,\neg s\}} \quad \{s\}}{\{\neg q,\neg r\}} \quad \cfrac{\cfrac{\{s,\neg q\}\quad\{r,\neg s\}}{\{r,\neg q\}}\quad\{q\}}{\{r\}}}{\{\neg q\}} \quad \{q\}}{\Box}$$

Sei Γ die Menge der Hypothesen der obigen Resolution. Dann ist Γ eine Menge von Horn-Klauseln und mit Lemma 7.17 folgt, dass es eine Horn-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion $\Box$ gibt. Führen Sie die auf Folien 7.11–7.14 beschriebenen Umformungsschritte durch, um eine solche Horn-Ableitung zu bestimmen. Geben Sie nach jedem "Hornifizierungsschritt" (Folie 7.11) ein Zwischenergebnis (die resultierende Resolutions-Refutation) an.

Hinweis: Beachten Sie, dass erst die am weitesten unten stehende positive Resolvente 'eliminiert' wird.

Aufgabe 5*

1+2+2+1 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Angenommen es gäbe eine Formel φ mit $\emptyset \vdash \varphi$ und $\emptyset \vdash \neg\varphi$. Dann ist jede aussagenlogische Formel ein Theorem.

(b) Seien Γ, Δ maximal konsistente Mengen mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\Gamma \cap \Delta \vdash \varphi$.
Gilt die Behauptung auch, falls auf die Forderung, dass Γ und Δ maximal konsistent sind verzichtet wird?

(c) Eine Menge Γ von Formeln ist genau dann konsistent, wenn es eine Formel φ gibt, mit $\Gamma \not\models \varphi$.

(d) Sei Γ eine beliebige Menge von Formeln. Dann gilt:

$$\text{Es gibt ein } \varphi \text{ mit } \Gamma \models \varphi \text{ und } \Gamma \models \neg\varphi \quad \text{gdw.} \quad \text{für alle Formeln } \psi \text{ gilt } \Gamma \models \psi \text{ und } \Gamma \models \neg\psi.$$

[1] Wir nennen zwei Mengen Γ, Δ von Formeln *äquivalent*, falls für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$ gdw. $\mathcal{B}(\delta) = 1$ f.a. $\delta \in \Delta$.