**TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik**
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
**ILMENAU**

# Logik und Logikprogrammierung – Übung 7

Abgabe bis zum 24. November um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.
Sollte die Vorlesung am 20.11. nicht stattfinden, werden Aufgaben 2 und 3 nicht bewertet.

**Aufgabe 1** (Tseitin-Konstruktion)* — 3 Punkte

Gegeben sei die Formel $\gamma = \neg\big(r \longrightarrow (p \wedge q)\big)$. Geben Sie den Syntaxbaum für $\varphi$ an und bestimmen Sie das Ergebnis $\gamma'$ der Tseitin-Konstruktion (Folien 8.2ff) für $\varphi$.

**Aufgabe 2** (Eigenschaften von Graphen)* — 9 Punkte

Wir betrachten die Signatur $\Sigma$ der Graphen (vgl. Folie 9.21), d.h. $\Sigma$ besistzt ausschließlich das zweistellige Relationssymbol $E$. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Geben Sie zu jeder der folgenden Graph-Eigenschaften einen $\Sigma$-Satz an, welcher diese beschreibt.

- (i) Die Kantenrelation ist symmetrisch und transitiv.
- (ii) Es gibt einen Knoten mit Eingangsgrad $\geq 2$.
- (iii) Es gibt wenigstens zwei Kanten.
- (iv) Es gibt keinen Weg[1] der Länge $> 2$.
- (v) Je zwei Knoten haben einen gemeinsamen Nachfolger.

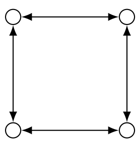
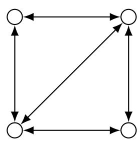
(b) Geben Sie zu jeder der folgenden $\Sigma$-Formeln eine möglichst natürliche verbale Beschreibung an.

- (i) $\forall x \exists y\ \big(\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x)\big)$
- (ii) $\exists y \forall x\ \big(\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x)\big)$
- (iii) $\big(\forall x \forall y\ \neg E(x,y)\big) \vee \big(\forall x \forall y\ E(x,y) \longrightarrow E(y,x)\big)$
- (iv) $\exists x \exists y \forall u \forall v\ E(u,v) \longrightarrow (u = x \wedge v = y)$

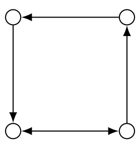
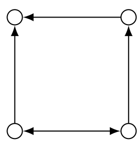
**Aufgabe 3*** — 3 Punkte

Sei $\Sigma$ die Signatur der Graphen von Folie 9.21. Geben Sie für jedes der folgenden Paare $G, H$ von Graphen je einen $\Sigma$-Satz $\varphi$ an, sodass $G$ die Eigenschaft $\varphi$ besitzt, aber $H$ hingegen nicht.

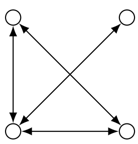
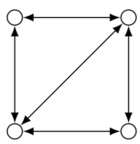
(a)

$G$  $H$ 

(b)

$G$  $H$ 

(c)

$G$  $H$ 

[1] Ein Weg der Länge $k$ ist eine Folge $u_0, u_1, \ldots, u_k$ von paarweise verschiedenen Knoten mit der Eigenschaft, dass $(u_i, u_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

**Aufgabe 4** (Semantik der Prädikatenlogik)
Sei $\Sigma$ die Signatur der Graphen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

(a) $\{\forall x \forall y \exists z\, E(x,y) \longrightarrow E(x,z)\}$ ist allgemeingültig.

(b) $\{\forall x \exists z \forall y\, E(x,y) \longrightarrow E(x,z)\}$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(c) $\{\forall x \forall y\, ((\exists z\, E(x,z) \land E(y,z)) \longrightarrow x = y)\} \models \neg \exists x \exists y \exists z\, x \neq y \land E(x,z) \land E(y,z)$

(d) $\{\forall x \forall y\, (E(x,y) \lor E(y,x))\} \models \exists x \exists y\, (E(x,y) \land \neg(x = y))$.

**Aufgabe 5** (Eigenschaften von Horn-Klauseln)
Sei $P$ die Menge aller atomaren Formeln. Wir betrachten in dieser Aufgabe ausschließlich Belegungen, welche auf ganz $P$ definiert sind.
Wir sagen, dass eine Klausel $\Phi$ die Bedingung (†) erfüllt, falls für alle Belegungen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(p) = \min\{\mathcal{B}_1(p), \mathcal{B}_2(p)\}$ für alle $p \in P$ gilt: Ist $\mathcal{B}_1(\Phi) = \mathcal{B}_2(\Phi) = 1$, so auch $\mathcal{B}(\Phi) = 1$.
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie, dass jede Hornklausel $\Phi$ die Bedingung (†) erfüllt.

(b) Sei $\Phi \neq \Box$ eine Hornklausel. Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass es genau eine Belegung $\mathcal{B}^*$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $\mathcal{B}^*(\Phi) = 1$ und

(ii) ist $\mathcal{B}'$ eine Belegung mit $\mathcal{B}'(\Phi) = 1$, so gilt $\mathcal{B}^*(p) \leq \mathcal{B}'(p)$ für alle $p \in P$.

*Bemerkung.* Die Bedingungen (i) und (ii) drücken aus, dass $\mathcal{B}^*$ eine "kleinste" Belegung mit $\mathcal{B}^*(\Phi) = 1$ ist.

(c) Sei $\Phi$ eine Klausel mit $p \notin \Phi$ oder $\neg p \notin \Phi$ f.a. atomaren Formeln $p \in P$. Zeigen Sie: Erfüllt $\Phi$ die Bedingung (†), so ist $\Phi$ eine Hornklausel.

*Hinweis.* Eine Klausel $\Phi$ mit $p, \neg p \in \Phi$ für ein $p \in P$ erfüllt trivialerweise die Bedingung (†).

(d) Sei $\varphi = \neg(p_1 \land p_2) \longrightarrow (p_3 \lor p_4)$. Verwenden Sie Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass es keine Menge $\Gamma$ von Hornklauseln derart gibt, dass $\Gamma$ und $\{\varphi\}$ äquivalent sind[2].

[2]Wir nennen zwei Mengen $\Gamma, \Delta$ von Formeln *äquivalent*, falls für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$ gdw. $\mathcal{B}(\delta) = 1$ f.a. $\delta \in \Delta$.