TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 8

Diese Übungsserie wird nicht bewertet.

Aufgabe 1

Sei Σ die Signatur der Graphen von Folie 9.21. Geben Sie zu jeder der folgenden Σ-Aussagen Graphen G, H mit je wenigstens vier Knoten so an, dass $\mathcal{A}_G$ ein Modell für diese Formel bildet, aber $\mathcal{A}_H$ hingegen nicht.

(a) $\forall x \forall y \forall z\colon \Big(\big(E(x,y) \wedge E(y,z)\big) \longrightarrow E(x,z)\Big)$

(b) $\forall x \exists y\colon \Big(E(x,y) \wedge \neg E(y,x)\Big)$

(c) $\exists x\colon \forall y \forall z\colon \Big(E(x,y) \longleftrightarrow E(x,z)\Big)$

(d) $\forall x\colon \exists y\colon \Big(E(x,y) \wedge \forall z\colon \big(y = z \vee \neg E(y,z)\big)\Big)$

Aufgabe 2 (Semantik der Prädikatenlogik)

Sei Σ die Signatur der Graphen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

(a) $\big\{\forall x \forall y \exists z\colon E(x,y) \longrightarrow E(x,z)\big\}$ ist allgemeingültig.

(b) $\big\{\forall x \exists z \forall y\colon E(x,y) \longrightarrow E(x,z)\big\}$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(c) $\big\{\forall x \forall y\colon \big((\exists z\colon E(x,z) \wedge E(y,z)) \longrightarrow x = y\big)\big\} \models \neg\exists x \exists y \exists z\colon x \neq y \wedge E(x,z) \wedge E(y,z)$.

(d) $\big\{\forall x \forall y\colon \big(E(x,y) \vee E(y,x)\big)\big\} \models \exists x \exists y\colon \big(E(x,y) \wedge \neg(x = y)\big)$.

Aufgabe 3

Sei Σ eine Signatur mit einem einstelligen Relationssymbol R, einem einstelligen Funktionssymbol f, sowie einem nullstelligen Funktionssymbol a. Zeigen Sie, dass $\forall x \exists y\colon f(x) = y$ und $\exists x\colon \big(P(x) \longrightarrow P(a)\big)$ Theoreme sind.

<u>Aufgabe 4</u> (Eigenschaften von Horn-Klauseln)

Sei P die Menge aller atomaren Formeln. Wir betrachten in dieser Aufgabe ausschließlich Belegungen, welche auf ganz P definiert sind.

Wir sagen, dass eine Klausel Φ die Bedingung (†) erfüllt, falls für alle Belegungen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(p) = \min\{\mathcal{B}_1(p), \mathcal{B}_2(p)\}$ für alle $p \in P$ gilt: Ist $\mathcal{B}_1(\Phi) = \mathcal{B}_2(\Phi) = 1$, so auch $\mathcal{B}(\Phi) = 1$.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie, dass jede Hornklausel Φ die Bedingung (†) erfüllt.

(b) Sei $\Phi \neq \square$ eine Hornklausel. Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass es genau eine Belegung $\mathcal{B}^*$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

  (i) $\mathcal{B}^*(\Phi) = 1$ und

  (ii) ist $\mathcal{B}'$ eine Belegung mit $\mathcal{B}'(\Phi) = 1$, so gilt $\mathcal{B}^*(p) \leq \mathcal{B}'(p)$ für alle $p \in P$.

  Bemerkung. Die Bedingungen (i) und (ii) drücken aus, dass $\mathcal{B}^*$ eine "kleinste" Belegung mit $\mathcal{B}^*(\Phi) = 1$ ist.

(c) Sei Φ eine Klausel mit $p \notin \Phi$ oder $\neg p \notin \Phi$ f.a. atomaren Formeln $p \in P$. Zeigen Sie: Erfüllt Φ die Bedingung (†), so ist Φ eine Hornklausel.

  Hinweis. Eine Klausel Φ mit $p, \neg p \in \Phi$ für ein $p \in P$ erfüllt trivialerweise die Bedingung (†).

(d) Sei $\varphi = \neg(p_1 \wedge p_2) \longrightarrow (p_3 \vee p_4)$. Verwenden Sie Aufgabenteil (a) um zu zeigen, dass es keine Menge Γ von Hornklauseln derart gibt, dass Γ und $\{\varphi\}$ äquivalent sind[1].

[1] Wir nennen zwei Mengen Γ, Δ von Formeln *äquivalent*, falls für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$ gdw. $\mathcal{B}(\delta) = 1$ f.a. $\delta \in \Delta$.