TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 9

Abgabe bis zum 08. Dezember um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

Wir betrachten die Signatur Σ mit zwei einstelligen Relationssymbolen P, Q, sowie einem nullstelligen Funktionssymbol a. Entscheiden Sie für die folgenden Σ-Formeln, ob diese nicht erfüllbar[1], allgemeingültig, oder erfüllbar aber nicht allgemeingültig sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\neg P(a) \lor \forall x\colon P(x)$
(b) $\forall x\colon \big(P(x) \longrightarrow \exists y\colon Q(y)\big)$
(c) $\exists y \forall x\colon P(y) \longrightarrow P(x)$
(d) $\forall x \forall y\colon P(x) \lor \neg P(y)$
(e) Selbststudium: $\neg P(x) \lor \exists y\colon P(y)$
(f) Selbststudium: $\neg P(x) \land \exists y\colon P(y)$
(g) Selbststudium: $\neg P(x) \lor \forall y\colon P(y)$

Aufgabe 2* — 4 Punkte

Sei Σ die Signatur der Datenbank von Folie 9.4ff. Beschreiben Sie jede der folgenden Eigenschaften durch eine Σ-Aussage:

(a) Es gibt genau zwei Professoren.
(b) Es gibt eine jüngste Person.
(c) Bis auf (höchstens) eine Ausnahme nehmen alle Studenten, welche an der Veranstaltung LuLP teilnehmen auch an der Veranstaltung AuD teil.
(d) Es gibt zwei Studenten, welche gegenseitig am besten miteinander über Informatik reden können.

Aufgabe 3

Sei Σ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol $\leq$ (insbesondere also ohne Konstanten). Geben seien die nachfolgenden Paare von Strukturen (wobei $\leq$ jeweils die übliche bzw. komponentenweise Ordnungsrelation bezeichnet). Geben Sie für jedes Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ je eine Σ-Aussage an, sodass genau eine der beiden Strukturen ein Modell für diese Formel ist.

(a) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, \leq)$
(b) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$
(c) $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{Q}, \leq)$
(d) $\mathcal{A} = (\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}, \leq)$ und $\mathcal{B} = (\{0,1\} \times \{0,1,2,3\}, \leq)$

[1] Eine Formel φ heißt erfüllbar, falls $\{\varphi\}$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4* 4 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden, inkorrekten Deduktionen je einen falschen Ableitungsschritt an und begründen Sie Ihre Entscheidung:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y\colon x+1=y}{\exists y\colon y+1=y}\,(\forall\mathrm{E}) \qquad \dfrac{[y+1=y]^1 \qquad y=0}{0+1=0}\,(\mathrm{GfG})}{0+1=0}\,(\exists\mathrm{E})^1$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y=y}\,(\mathrm{R})}{\forall y\colon y=y}\,(\forall\mathrm{I})}{\exists x \forall y\colon x=y}\,(\exists\mathrm{E})$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\forall x\colon P(x)]^2 \qquad \dfrac{[P(x)]^1}{\forall x\colon P(x)}\,(\forall\mathrm{I})}{\bot}\,(\neg\mathrm{E})}{\neg P(x)}\,(\neg\mathrm{I})^1}{\forall x\colon \neg P(x)}\,(\forall\mathrm{I})}{\neg\forall x\colon P(x) \longrightarrow \forall x\colon \neg P(x)}\,(\longrightarrow\mathrm{I})^2$$

(d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\colon P(x)]^2 \qquad [P(x)]^1}{P(x)}\,(\exists\mathrm{E})^1}{\forall x\colon P(x)}\,(\forall\mathrm{I})}{\exists x\colon P(x) \longrightarrow \forall x\colon P(x)}\,(\longrightarrow\mathrm{I})^2$$

Aufgabe 5* 3 Punkte

Geben Sie zum Beweis des Korrektheitslemmas für das natürliche Schließen in der Prädikatenlogik (Lemma 10.14) den Induktionsschritt für den Fall (GfG) an.

Hinweis. Verwenden Sie Lemma 10.12.