TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Wintersemester 2023/2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 10

Abgabe bis zum 15. Dezember um 09:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Aufgabe 1*

4 Punkte

Sei Σ die Signatur mit den zweistelligen Funktionssymbolen + und $\cdot$. Geben Sie zu jeder der Strukturen $(\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}})$, $(\mathbb{Z}, +^{\mathbb{Z}}, \cdot^{\mathbb{Z}})$, $(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$ und $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}})$ je eine Σ-Aussage an, welche in dieser Struktur, aber keiner der drei anderen gilt.

Bemerkung: Sie dürfen in Ihren Formeln die Infixnotation für + und $\cdot$ verwenden (z.B. $x + y$). Beachten Sie, dass die Strukturen keine Konstanten haben (insbesondere weder 0 noch 1).

Aufgabe 2*

1+1+1 Punkte

Sei Σ die Signatur der Graphen von Folie 9.21, d.h., wir betrachten gerichtete Graphen, deren Eckenmenge u.U. unendlich sein kann. Wir nennen einen Graph *stark zusammenhängend*, wenn für jedes Paar (u, v) von Knoten ein endlicher Weg von u nach v existiert. Wir möchten in dieser Aufgabe zeigen, dass sich die stark zusammenhängenden Graphen nicht durch eine Σ-Aussage beschreiben lassen. Dazu werden wir zunächst versuchen, die Eigenschaft, nicht stark zusammenhängend zu sein, zu beschreiben:

(a) Geben Sie für jedes $d \in \mathbb{N}$ eine Σ-Aussage φ_d an, sodass φ_d in einem Graph G genau dann gilt, wenn es in G zwei Knoten gibt, die nicht durch einen Weg der Länge $\leq d$ miteinander verbunden sind.

(b) Geben Sie eine unendliche Menge Φ von Σ-Aussagen an, sodass in einem Graph G alle Formeln in Φ genau dann gelten, wenn G nicht stark zusammenhängend ist.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik, dass es keine Σ-Aussage ψ gibt, welche in einem Graph G genau dann gilt, wenn G stark zusammenhängend ist.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine solche Σ-Aussage ψ gäbe und leiten Sie aus der Unerfüllbarkeit von $\Phi \cup \{\psi\}$ unter Verwendung des Kompaktheitssatzes einen Widerspruch her. Die Korrektheit Ihrer Konstruktionen in Teilaufgaben (a) und (b) müssen Sie nicht zeigen.

Zusatz: Zeigen Sie, dass es auch keine Formelmenge Ψ gibt, welche die Klasse der stark zusammenhängenden Graphen beschreibt.

Aufgabe 3*

5 Punkte

Sei Σ eine Signatur mit Funktionssymbolen a, b, f und h, wobei h zweistellig, f einstellig und a, b nullstellig sind. Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus von Folie 12.20 um für die folgenden Mengen von Termpaaren zu entscheiden, ob diese unifizierbar sind. Geben Sie nach jedem Transformationsschritt ein Zwischenergebnis an und bestimmen Sie im positiven Fall einen allgemeinsten Unifikator, sowie einen weiteren Unifikator.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} h(f(a), f(x)) \\ h(z, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f(x) \\ f(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ f(x) \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} h(a, ff(x)) \\ h(y, f(z)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f(z) \\ f(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h(a, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix} \right\}$

Hinweis. Zur Verbesserung der Lesbarkeit werden Termpaare (s, t) in Spaltenform $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ notiert.

Aufgabe 4* $\boxed{\text{3 Punkte}}$

Geben Sie eine Deduktion mit Hypothesen aus $\{\ \forall x\colon \big(P(x) \longrightarrow Q(x)\big)\ \}$ und Konklusion $\big(\exists x\colon P(x)\big) \longrightarrow \big(\exists x\colon Q(x)\big)$ an.

Aufgabe 5

Sei Σ eine Signatur mit zwei einstelligen Funktionssymbolen f und g. Zeigen Sie die folgenden syntaktischen Folgerungen je durch Angabe einer geeigneten Deduktion:

(a) $\big\{\forall x\colon f(g(x)) = x, \forall y\colon g(f(y)) = y\big\} \vdash \forall y \exists x\colon f(x) = y$

(b) $\big\{\forall x\colon f(g(x)) = x, \forall y\colon g(f(y)) = y\big\} \vdash \forall x, x'\colon f(x) = f(x') \longrightarrow x = x'$