TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Sebastian Pfau
WS 2026/2027

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 3

Abgabe: bis Mittwoch, 04. November 2026, um 11:00 Uhr im Briefkasten vor dem Raum Z1047, vor der Übung oder über moodle.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

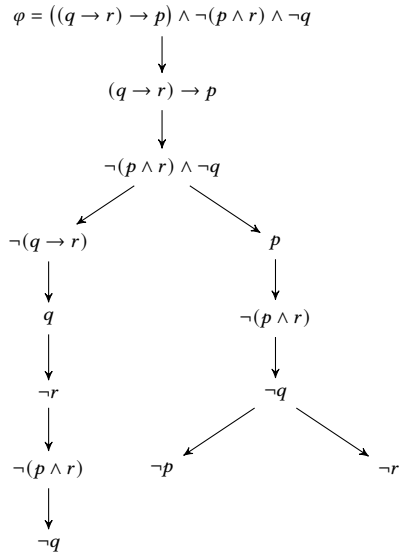
Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre handschriftlichen Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1* — 3 Punkte

Seien Δ und Δ' zwei maximal konsistente Mengen mit $p \in \Delta$ gdw. $p \in \Delta'$ für alle atomaren Formeln p. Zeigen Sie, dass dann $\Delta = \Delta'$ gilt.

Aufgabe 2* — 2+2 Punkte

Gegeben sei das nachfolgende Tableau T für $\varphi = \big((q \to r) \to p\big) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg q$.



Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Geben Sie für jede in T verwendete Regel die zugehörigen Formeln, sowie den Typ der Regel an. (Siehe Folie 5.6. Bitte geben Sie den exakten Typ an und nicht nur konjunktiv/disjunktiv.)

(b) Entscheiden Sie, ob T vollständig expandiert ist. Geben Sie für jeden Ast von T an, ob dieser offen oder geschlossen ist.

Aufgabe 3* — 2 Punkte

Geben Sie für den Beweis der Behauptung "Für alle Formeln α auf A gilt $\mathcal{B}(\alpha) = 1$"(Folien 5.14f) jeweils den Induktionsschritt für die Fälle $\alpha = \beta \to \gamma$ und $\alpha = \neg(\beta \to \gamma)$ an. Achten Sie auf saubere mathematische Notation wie in der Vorlesung.

Aufgabe 4* 1+1+1+1+1+1 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_2$[1] mit Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Wir möchten zeigen, dass ein abzählbares Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_2$ genau dann eine Lösung besitzt, wenn bereits jedes endliche Teilsystem lösbar ist. Seien $p_1, p_2, p_3, \ldots$ paarweise verschiedene atomare Formeln.

(a) Gegeben sei die Gleichung

$$x_1 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3 = 1. \tag{†}$$

Geben Sie eine Formel φ an, sodass φ genau dann unter einer Belegung $\mathcal{B}$ erfüllt ist, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (†) ist (wobei $\mathcal{B}(p_i)$ als Element aus $\mathbb{Z}_2$ aufgefasst wird).

(b) Ein *Monom*[2] ist ein endliches Produkt von einem Koeffizienten $a \in \{0, 1\}$ und Potenzen von Variablen (zum Beispiel $1 \cdot x_1 x_2^2 x_4 = x_1 x_2^2 x_4$). Wir schreiben $M(v_1, v_2, \ldots)$ für den Wert des Monoms M unter der Variablenbelegung $x_i = v_i$ für $i \geq 1$ und $v_i \in \mathbb{Z}_2$.
Geben Sie für jedes Monom M eine Formel φ_M an, sodass für alle Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\varphi_M) = 1 \quad \text{gdw.} \quad M(\mathcal{B}(p_1), \mathcal{B}(p_2), \ldots) = 1.$$

(c) Ein *multivariates Polynom* ist eine endliche Summe von Monomen (zum Beispiel $x_1 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3$). Analog zu oben schreiben wir $P(v_1, v_2, \ldots)$ für den Wert des Polynoms P unter der Variablenbelegung $x_i = v_i$ für $i \geq 1$ und $v_i \in \mathbb{Z}_2$.
Geben Sie für jedes Polynom P eine Formel φ_P an, sodass für alle Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\varphi_P) = 1 \quad \text{gdw.} \quad P(\mathcal{B}(p_1), \mathcal{B}(p_2), \ldots) = 1.$$

(d) Eine *Gleichung* hat die Form

$$P = c,$$

wobei P ein multivariates Polynom und $c \in \mathbb{Z}_2$ eine Konstante ist.
Geben Sie für jede Gleichung (E) eine Formel $\varphi_{(E)}$ an, sodass $\varphi_{(E)}$ genau dann unter einer Belegung $\mathcal{B}$ erfüllt ist, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (E) ist.

(e) Sei (G) ein abzählbares System von Gleichungen (E_i) für $i \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Menge $\Gamma_{(G)}$ von Formeln an, sodass $\Gamma_{(G)}$ genau dann unter einer Belegung $\mathcal{B}$ erfüllt ist, wenn $x_1 = \mathcal{B}(p_1), x_2 = \mathcal{B}(p_2), \ldots$ eine Lösung für (G) ist.

(f) Folgern Sie mithilfe des Kompaktheitssatzes des Aussagenlogik, dass (G) genau dann lösbar ist, wenn jedes endliche Teilsystem von (G) eine Lösung besitzt.

[1] $\mathbb{Z}_2$ ist der Ring $(\{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1)$ mit Addition und Multiplikation modulo 2.

[2] Wir betrachten ausschließlich Monome über $\mathbb{Z}_2$, d.h. die Reihenfolge der Faktoren ist irrelevant und die einzig möglichen Koeffizienten sind 1 und 0.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

Sei $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ die Menge aller atomaren Formeln. Zeigen Sie, dass für jedes $Q \subseteq P$ eine maximal konsistente Menge Δ existiert mit $\Delta \cap P = Q$.

Aufgabe 6

Sei $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ die Menge aller atomaren Formeln. Zeigen Sie, dass die Menge aller maximal konsistenten Mengen die selbe Mächtigkeit hat wie $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (und damit überabzählbar groß ist).

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 und Aufgabe 5.

Aufgabe 7

Das Ziel dieser Aussage ist es zu zeigen, dass für die reellen Zahlen keine Aussage analog zu der aus Aufgabe 4 gilt. Dafür betrachten wir in dieser Aufgabe Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$.

(a) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem (G) über $\mathbb{R}$
(zur Vereinfachung verwenden wir Variablen x_i, y_i und z):

$$\begin{array}{lll} x_1 & = 1 & \\ x_{i+1} & = x_i + 1 & \text{für alle } i \geq 1 \\ x_i + y_i^2 & = z & \text{für alle } i \geq 1 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass jedes endliche Teilsystem von (G) eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das vollständige Gleichungssystem (G) aus Aufgabenteil (a) hingegen *keine* Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.