TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Sebastian Pfau
WS 2026/2027

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 5

Abgabe: bis Mittwoch, 18. November 2026, um 11:00 Uhr im Briefkasten vor dem Raum Z1047, vor der Übung oder über moodle.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre handschriftlichen Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1* — 5 Punkte

Gegeben sei die folgende Resolutions-Refutation:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{q\} \to r \quad \{p\} \to q}{\{q,r,s\} \to \bot \qquad \{p\} \to r} \qquad \emptyset \to q}{\{p,q,s\} \to \bot}}{\{p,s\} \to \bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\{p\} \to q \quad \{q\} \to s}{\{p\} \to s} \qquad \emptyset \to p}{\emptyset \to s}}{\{p\} \to \bot} \qquad \emptyset \to p}{\square}$$

Sei Γ die Menge der Hypothesen der obigen Resolutionsableitung. Dann ist Γ eine Menge von Hornklauseln und mit dem Lemma von Folie 7.19 folgt, dass es eine Horn-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion $\square$ gibt. Formen Sie die gegebene Resolutions-Ableitung schrittweise zu einer solchen Horn-Ableitung um. Orientieren Sie sich dabei an den Folien 7.10 - 7.14. Geben Sie nach jedem Umformungsschritt ein Zwischenergebnis an.

Aufgabe 2* — 3 Punkte

Gegeben sei die Liste $\Gamma = ((p,q,r) \to \bot, (s) \to p, (r) \to p, (r) \to q, \emptyset \to r, (p) \to s)$ von Hornklauseln (wir fassen die Prämissen von Klauseln hier als Listen auf, vgl. Folie 7.28). Geben Sie eine Hornableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion $\square$ an. Gibt es auch eine SLD-Resolution mit Hypothesen aus Γ und Konklusion $\square$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3* — 3 Punkte

Gegeben sei die Formel $\varphi = \big(p \to (q \wedge r)\big) \vee s$. Geben Sie den Syntaxbaum (vgl. Folie 8.3) von φ an und bestimmen Sie das Ergebnis φ' der Tseitin-Konstruktion auf φ.

Aufgabe 4* — 1+1+2 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Seien Γ und Δ maximal konsistente Formelmengen mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\Gamma \cap \Delta \vdash \varphi$.

(b) Es gibt Formelmengen Γ, Δ und eine Formel φ, sodass $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Delta \vdash \varphi$, aber $\Gamma \cap \Delta \nvdash \varphi$ gelten.

(c) Sei Γ eine Formelmenge und φ, ψ Formeln. Dann gilt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ genau dann wenn $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Angenommen es gäbe eine Formel φ mit $\emptyset \vdash \varphi$ und $\emptyset \vdash \neg\varphi$. Dann wäre jede aussagenlogische Formel ein Theorem.

(b) Eine Menge von Formeln ist genau dann konsistent, wenn es eine Formel φ gibt, mit $\Gamma \nvdash \varphi$.

(c) Sei Γ eine beliebige Menge von Formeln. Dann gilt:
Es gibt eine Formel φ mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$ genau dann wenn für alle Formeln ψ gilt $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$.