TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Sebastian Pfau
WS 2026/2027

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 6

Abgabe: bis Mittwoch, 25. November 2026, um 11:00 Uhr im Briefkasten vor dem Raum Z1047, vor der Übung oder über moodle.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre handschriftlichen Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1*

3 Punkte

Sei Σ die Signatur mit dem ein-stelligen Relationssymbol P, den zwei-stelligen Relationssymbolen Q und R, dem null-stelligen Funktionssymbol a und dem ein-stelligen Funktionssymbol f (vgl. Folie 9.20). Bestimmen Sie für jede der folgenden Σ-Formeln φ jeweils die Menge $FV(\varphi)$ der freien Variablen von φ.

(a) $\exists x : P(x) \wedge P(a) \wedge \forall y : P(y) \wedge P\big(f(z)\big)$

(b) $\forall x \forall y : \big(Q(x,y) \wedge \exists y : R(x,y)\big)$

(c) $\forall y : \big(\exists x : Q(x,y) \to R(x,y)\big)$

(d) $\forall x \exists y : \big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \to Q(x,y)$

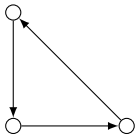
(e) $\exists x \exists y : \Big(\forall w : \big(P(w) \vee Q(x,y)\big) \wedge \exists z : \big(P(z) \to R(z,a)\big) \wedge \forall z : \big(Q(z,w) \vee R(z,y)\big)\Big) \vee \exists w : \big(R(w,a) \to Q(x,w)\big)$

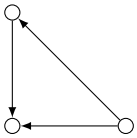
Aufgabe 2*

1+1+1 Punkte

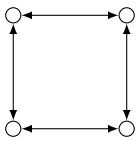
Sei Σ die Signatur der gerichteten Graphen von Folie 9.12. Geben Sie für jedes der folgenden Paare G, H von Graphen je eine Σ-Aussage φ an, sodass G die Eigenschaft φ besitzt, aber H hingegen nicht.

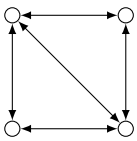
(a)

G: 

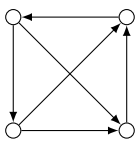
H: 

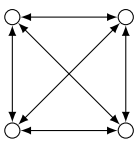
(b)

G: 

H: 

(c)

G: 

H: 

Aufgabe 3* 3+2+4 Punkte

Wir betrachten die Signatur Σ der gerichteten Graphen (vgl. Folien 9.12 und 9.23), d.h. Σ besitzt ausschließlich das zweistellige Relationssymbol E. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Beschreiben Sie jede der folgenden Graph-Eigenschaften durch eine Σ-Aussage.

(i) Die Kantenrelation ist antisymmetrisch.

(ii) Der Graph hat höchstens zwei Knoten.

(iii) Jeder Knoten hat genau einen Nachfolger.

(b) Geben Sie zu jeder der folgenden Σ-Formeln eine möglichst natürliche verbale Beschreibung an.

(i) $\forall x \forall y \forall z : \Big(\big(E(x,y) \wedge E(y,z) \big) \rightarrow E(x,z) \Big)$

(ii) $\exists x \exists y \exists z : \Big(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(z,x) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \Big)$, dabei ist $x \neq y$ Kurzschreibweise für $\neg(x = y)$.

(c) Geben Sie eine Σ-Formel φ mit freien Variablen x und y an, die unter einer Variableninterprätation ρ genau dann gilt, wenn ...

(i) es einen Pfad[1] der Länge ≤ 2 von $\rho(x)$ nach $\rho(y)$ gibt.

(ii) die Nachfolger von $\rho(x)$ genau die Vorgänger von $\rho(y)$ sind.

[1] Ein Pfad der Länge k ist eine Folge $u_0, u_1, ..., u_k$ von paarweise verschiedenen Knoten mit der Eigenschaft, dass $(u_i, u_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{0, ..., k-1\}$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Sei Σ die Signatur mit dem zweistelligen Funktionssymbolen + und ·. Wir betrachten die Strukturen $(\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}})$, $(\mathbb{Z}, +^{\mathbb{Z}}, \cdot^{\mathbb{Z}})$, $(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}})$ und $(\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}})$. Geben Sie für jede dieser Strukturen je eine Σ-Aussage an, welche in dieser Struktur gilt, aber in keiner der vorhergehenden.

Hinweis: Sie dürfen in Ihren Formeln die Infixnotation für + und · verwenden (z.B. $x + y$ statt $+(x, y)$). Beachten Sie, dass die Strukturen keine Konstanten haben (Insbesondere weder 0 noch 1).