TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Sebastian Pfau
WS 2026/2027

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Logik und Logikprogrammierung – Übung 2

Abgabe: bis Mittwoch, 28. Oktober 2026, um 11:00 Uhr im Briefkasten vor dem Raum Z1047, vor der Übung oder über moodle.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre handschriftlichen Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

In Aufgabe 1 des ersten Übungsblattes haben wir Aussagen der natürlichen Sprache durch folgende Formeln formalisiert:

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \qquad (\neg A \vee \neg E) \to \neg C \qquad B \to (C \vee D) \qquad \neg A$$

Geben Sie eine formale Deduktion mit Konklusion D an, welche ausschließlich diese Formeln als Hypothesen nutzt (alle anderen Hypothesen sind gestrichen).

Aufgabe 2* — 1+1+1+1 Punkte

Seien p und q atomare Formeln. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{B}\big(p \vee q) \to q\big)$ für die Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(p) = 1$ und $\mathcal{B}(q) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\{(p \vee q) \to q\} \models p \to q$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\{(p \vee q) \to q\} \not\models q$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $p \vee \big((p \vee q) \to q\big)$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 3* — 3 Punkte

Geben Sie für das Korrektheitslemma (Folien 3.13ff) den Induktionsschritt für den Fall $(\neg E)$ an. Achten Sie insbesondere auf saubere mathematische Notation wie in der Vorlesung.

Aufgabe 4* — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel φ eine Formel φ' gibt, welche nur die atomaren Formeln, $\bot$, sowie den Operator $\to$ verwendet und für welche $\mathcal{B}(\varphi) = \mathcal{B}(\varphi')$ für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass es keine aussagenlogische Formel φ gibt, welche nur atomare Formeln und $\rightarrow$ verwendet (also insbesondere nicht $\bot$) und für welche $\mathcal{B}(\varphi) = 0$ für alle Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

Aufgabe 6

Seien p, q, r atomare Formeln. Entscheiden Sie, welche der folgenden Formeln Tautologien sind. Beweisen Sie jeweils ihre Behauptungen.

(a) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

(b) $(p \vee q) \rightarrow p$

(c) $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

(d) $p \rightarrow \big(q \rightarrow (r \rightarrow p)\big)$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Menge aller Formeln der Aussagenlogik abzählbar ist. Beweisen Sie dabei die folgenden Hilfsaussagen:

(1) Jede abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist wieder abzählbar.

(2) Die Menge aller Wörter über einem Alphabet (einer endlichen nichtleeren Menge) ist abzählbar.