

Logik und Logikprogrammierung

Vorlesung 2:

Natürliches Schließen der AL



Prof. Dr. Dietrich Kuske



FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2026/27

Natürliches Schließen

Ein (mathematischer) Beweis zeigt, wie die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt (vgl. Folie 1.28).

Analog zeigt ein „Beweisbaum“ (= „Herleitung“ = „Deduktion“), wie eine Formel der Aussagenlogik aus Voraussetzungen (ebenfalls Formeln der Aussagenlogik) folgt.

Diese „Deduktionen“ sind Bäume (vgl. Folie 1.29), deren Knoten mit Formeln beschriftet sind:

- an der Wurzel steht die Behauptung
(= **Konklusion** φ)
- an den Blättern stehen Voraussetzungen
(= **Hypothesen** oder **Annahmen** aus Γ)
- an den inneren Knoten stehen „Teilergebnisse“
und „Begründungen“



Konstruktion von Deduktionen

Aus der Annahme der Aussage φ folgt φ unmittelbar:

eine triviale Deduktion

φ

mit Hypothesen $\{\varphi\}$ und Konklusion φ .

Auf den folgenden Folien werden wir

- **überlegen**, wie aus „einfachen mathematischen Beweisen“ umfangreichere entstehen können, und
- parallel dazu **definieren**, wie aus einfachen Deduktionen umfangreichere konstruiert werden können.

Konstruktion von Deduktionen - Konjunktion

Konjunktionseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ φ und ψ “ sieht üblicherweise so aus:

„Zunächst zeige ich φ : ... (hier steckt die eigentliche Arbeit)
Jetzt zeige ich ψ : ... (noch mehr eigentliche Arbeit)
Also haben wir „ φ und ψ “ gezeigt. qed“

Konjunktionseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla D \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla E \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi}$$

Konjunktionseinführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)$$

Konjunktionselimination (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\varphi \wedge \psi$ mit Hypothesen aus Γ , so ergeben sich die folgenden Deduktionen von φ bzw. von ψ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\frac{\Gamma}{\triangle D} \quad \varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\frac{\Gamma}{\triangle D} \quad \varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Konjunktionselimination (Kurzform)

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_2)$$

Beispiel

Wir zeigen $\varphi \wedge \psi$ unter der Hypothese $\psi \wedge \varphi$:

$$\frac{\frac{\psi \wedge \varphi}{\varphi} (\wedge E_2) \quad \frac{\psi \wedge \varphi}{\psi} (\wedge E_1)}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)$$

Dies ist eine Deduktion mit Konklusion $\varphi \wedge \psi$ und Hypothese $\psi \wedge \varphi$ (zweimal verwendet).

Konstruktion von Deduktionen - Implikation

Implikationseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „Aus φ folgt ψ “ sieht üblicherweise so aus:

„Angenommen, φ gilt.

Dann ... (hier steckt die eigentliche Arbeit).

Damit gilt ψ .

Also haben wir gezeigt, daß ψ aus φ folgt. qed“

Die Aussage φ ist also eine „temporäre Hypothese“.

Implikationseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von ψ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\varphi \rightarrow \psi$ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, \varphi \\ \hline \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

Implikationseinführung (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I)$$

Beispiel

$$\frac{[\varphi]}{\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I)$$

Dies ist eine Deduktion von $\varphi \rightarrow \varphi$ ohne Hypothesen.

Implikationselimination in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ ψ gilt“ über eine Hilfsaussage sieht so aus:

„Zunächst zeigen wir, daß φ gilt: ...

Dann beweisen wir, daß ψ aus φ folgt: ...

Also haben wir ψ gezeigt. qed“

Implikationselimination oder modus ponens (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von $\varphi \rightarrow \psi$ mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von ψ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla D \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla E \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi}$$

Implikationselimination oder modus ponens (Kurzform)

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

Beispiel

$$\frac{\frac{\frac{[\varphi]^1 \quad [\psi]^2}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I) \quad [(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma]^3}{\frac{\frac{\frac{\sigma}{\psi \rightarrow \sigma} (\rightarrow I)^2}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)} (\rightarrow I)^1}{((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma))} (\rightarrow I)^3} (\rightarrow E)$$

Bemerkung: die Indizes 1, 2 und 3 machen deutlich, welche Hypothese bei welcher Regelanwendung gestrichen wurde.

Diese Deduktion hat keine Hypothesen!

Konstruktion von Deduktionen - Disjunktion

Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ σ gilt“ mittels Fallunterscheidung sieht üblicherweise so aus:

„Zunächst zeigen wir, daß $\varphi \vee \psi$ gilt: ...

Gilt φ , so gilt σ , denn ...

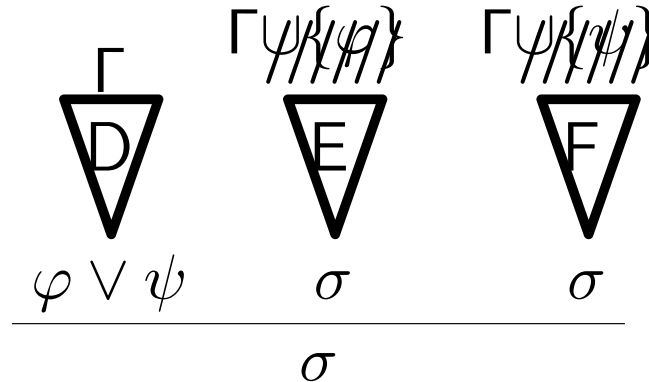
Gilt ψ , so gilt ebenfalls σ , denn ...

Also haben wir gezeigt, daß σ gilt. qed“

Die Aussagen φ und ψ sind also wieder „temporäre Hypothesen“.

Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\varphi \vee \psi$ mit Hypothesen aus Γ , ist E eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und ist F eine Deduktion von σ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\psi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von σ mit Hypothesen aus Γ :



Disjunktionselimination oder Fallunterscheidung (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{cc} [\varphi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots \\ \varphi \vee \psi & \sigma \end{array} \quad \sigma}{\sigma} (\vee E)$$

Disjunktionseinführung (Kurzform)

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_1) \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_2)$$

Beispiel

Seien φ und ψ beliebige Formeln. Dann ist das folgende eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge $\{\varphi \vee \psi\}$ und Konklusion $\psi \vee \varphi$.

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \frac{[\varphi]^1}{\psi \vee \varphi} (\vee I_2) \quad \frac{[\psi]^1}{\psi \vee \varphi} (\vee I_1)}{\psi \vee \varphi} (\vee E)^1$$

Konstruktion von Deduktionen - Negation

Negationseinführung in math. Beweisen

Ein mathematischer Beweis einer Aussage „ φ gilt nicht“ sieht so aus:

„Angenommen, φ gilt.

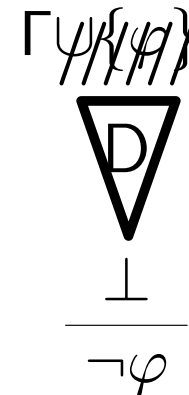
Dann folgt $0 = 1$, denn Mit anderen Worten, dies führt zu einem Widerspruch.

Also haben wir gezeigt, daß φ nicht gilt. qed“

Die Aussage φ ist also wieder eine „temporäre Hypothese“.

Negationseinführung (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ :



Negationselimination (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\neg\varphi$ mit Hypothesen aus Γ und ist E eine Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla D \\ \neg\varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla E \\ \varphi \end{array}}{\perp}$$

Negationseinführung und -elimination (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} (\neg I) \qquad \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg E)$$

Konstruktion von Deduktionen - Falsum

Hat man „ $0 = 1$ “ bewiesen, so ist man bereit, alles zu glauben:

ex falso sequitur quodlibet

(ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus Γ , so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\Gamma \begin{array}{c} \triangle \\ D \\ \perp \end{array}}{\varphi}$$

(Kurzform)

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp)$$

math. Widerspruchsbeweis

Ein indirekter Beweis einer Aussage „ φ gilt“ sieht üblicherweise so aus:

„Angenommen, φ gilt nicht, d.h. $\neg\varphi$ gilt.
Dann folgt $0 = 1$, d.h. ein Widerspruch.
Also haben wir gezeigt, daß φ gilt. qed“

Die Aussage $\neg\varphi$ ist also wieder eine „temporäre Hypothese“.

reductio ad absurdum (ausführlich)

Ist D eine Deduktion von $\perp$ mit Hypothesen aus $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, so ergibt sich die folgende Deduktion von φ mit Hypothesen aus Γ :

$$\frac{\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp}{\perp} \quad D}{\varphi}$$

reductio ad absurdum (Kurzform)

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} \text{ (raa)}$$

Regeln des natürlichen Schließens I

φ

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_1) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_2)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_1) \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_2)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \varphi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\sigma} (\vee E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I)$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

Regeln des natürlichen Schließens II

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} (\neg I)$$

$$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} (\text{raa})$$

Definition

Für eine Formelmenge Γ und eine Formel φ schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi$$

wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen aus Γ und Konklusion φ . Wir sagen „ φ ist eine **syntaktische Folgerung** von Γ “.

Eine Formel φ ist ein **Theorem**, wenn $\emptyset \vdash \varphi$ gilt.

Bemerkung

$\Gamma \vdash \varphi$ sagt (zunächst) nichts über den Inhalt der Formeln in $\Gamma \cup \{\varphi\}$ aus, sondern nur über die Tatsache, daß φ mithilfe des natürlichen Schließens aus den Formeln aus Γ hergeleitet werden kann.

Ebenso sagt „ φ ist Theorem“ nur, daß φ abgeleitet werden kann, über „Wahrheit“ sagt dieser Begriff (zunächst) nichts aus.

Beispiel

Für alle Formeln φ und ψ gelten $\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ und $\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$.

Beweis: Wir geben Deduktionen an:

$$\begin{array}{c} \frac{\neg(\varphi \vee \psi) \quad \frac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \psi} (\vee I_1)}{\perp} (\neg E) \quad \frac{\neg(\varphi \vee \psi) \quad \frac{[\psi]^2}{\varphi \vee \psi} (\vee I_2)}{\perp} (\neg E) \\ \frac{\perp}{\neg\varphi} (\neg I)^1 \quad \frac{\perp}{\neg\psi} (\neg I)^2 \\ \hline \neg\varphi \wedge \neg\psi (\wedge I) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\varphi} (\wedge E_1) \quad \frac{[\varphi]^1}{\perp} (\neg E) \quad \frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg\psi} (\wedge E_2) \quad \frac{[\psi]^1}{\perp} (\neg E) \\ \hline \frac{\perp}{\neg(\varphi \vee \psi)} (\neg I)^2 \end{array}$$

□

Beispiel

Für alle Formeln φ und ψ gelten $\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$ und $\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$

Beweis: Wir geben Deduktionen an:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\neg\varphi \vee \neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\neg I)^2 \quad \frac{[\neg\varphi]^1 \quad \frac{[\varphi \wedge \psi]^2}{\varphi} (\wedge E_1)}{\perp} (\neg E)}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\neg I)^2 \quad \frac{\frac{[\neg\psi]^1 \quad \frac{[\varphi \wedge \psi]^3}{\psi} (\wedge E_2)}{\perp} (\neg E)}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\neg I)^3}{\neg(\varphi \wedge \psi)} (\vee E)^1 \\
 \\
 \frac{\frac{\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\psi} (\neg I)^2 \quad \frac{[\varphi]^1 \quad [\psi]^2}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)}{\perp} (\neg E)}{\neg\psi} (\neg I)^2 \quad \frac{[\neg\varphi]^1}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee I_1)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee E)^1
 \end{array}$$

□

Beispiel

Für jede Formel φ ist $\varphi \vee \neg\varphi$ ein Theorem.

Beweis: Wir geben eine Deduktion mit Konklusion $\varphi \vee \neg\varphi$ ohne Hypothesen an:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^3}{\perp} (\neg I)^1 \quad \frac{\frac{[\varphi]^1}{\varphi \vee \neg\varphi} (\vee I_1) \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^3}{\varphi \vee \neg\varphi} (\neg E)}{\perp} (\neg I)^2 \quad \frac{[\neg\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} (\vee I_2) \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^3}{\varphi \vee \neg\varphi} (\neg E)}{\varphi \vee \neg\varphi} (\text{raa})^3$$



Beispiel

Für jede Formel φ ist $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ ein Theorem.

Beweis: Wir geben eine Deduktion mit Konklusion $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ ohne Hypothesen an:

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\neg\varphi]^2 \quad [\neg\varphi]^1}{\perp} (\neg E)}{\varphi} (raa)^1}{\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I)^2$$

□

Bemerkung

Man kann beweisen, daß jede Deduktion der letzten beiden Theoreme die Regel (raa) verwendet, sie also nicht „intuitionistisch“ gelten.

Zusammenfassung 2. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Kalkül des natürlichen Schließens als Formalisierung von Argumentationen mittels Formeln der Aussagenlogik

kommende Vorlesung

- exakte Beschreibung der Semantik (d.h. Bedeutung) von Formeln der Aussagenlogik