Logik und Logikprogrammierung
Vorlesung 5:
Tableau-Verfahren für die AL

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Prof. Dr. Dietrich Kuske

welt offenes Thüringen

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2026/27

Tableau-Verfahren

Folie 4.9: Algorithmus für Frage, ob $\Delta \vdash \varphi$ gilt (für Δ endlich). Allerdings erfolgt Ausgabe „Ja“ immer erst nach exponentiell vielen Schritten.

Ziel: Verfahren, das schneller ist.

Idee

$\Delta \vdash \varphi$ gdw. $\Delta \models \varphi$ gdw. $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar gdw. $\bigwedge_{\delta \in \Delta} \delta \wedge \neg\varphi$ unerfüllbar

$\rightarrow$ wir benötigen Test, ob eine Formel erfüllbar ist

Der Tableau-Kalkül stellt einen solchen Test dar.

Tableau-Verfahren

Idee des Tableau-Verfahrens: Sei $\mathcal{B}$ Belegung.

(1) $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\alpha \wedge \beta, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ gdw. $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \alpha, \beta\}$

(2) $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\alpha \vee \beta, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ gdw. $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \alpha\}$ oder $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \beta\}$

(3) $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\alpha \rightarrow \beta, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ gdw. $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \neg\alpha\}$ oder $\mathcal{B}$ erfüllt $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \beta\}$

$\vdots$

(A) Wenn $\mathcal{B}$ die Menge $\{p, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ bzw. $\{\neg p, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ erfüllt, so gilt $\mathcal{B}(p) = 1$ bzw. $\mathcal{B}(p) = 0$.

Um eine erfüllende Belegung für φ zu berechnen, konstruiert das Tableau-Verfahren aus $\{\varphi\}$ mittels obiger Regeln eine Menge Γ von Literalen (= möglicherweise negierte atomare Formeln), aus der dann mittels (A) die Belegung bestimmt werden kann (Γ muß natürlich widerspruchsfrei sein).

Beispiel

Die folgende Formel ist unerfüllbar:

$$\{p \wedge \neg r \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{p, \neg r \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{p, \neg r, q \wedge (\neg p \vee \neg q)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{p, \neg r, q, \neg p \vee \neg q\}$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\{p, \neg r, q, \neg p\} \qquad \{p, \neg r, q, \neg q\}$$

Wir haben zwei Mengen von Literalen erzeugt, die aber beide widersprüchlich sind.

Hoffnungen:

- Man erzeugt eine widerspruchsfreie Menge von Literalen genau dann, wenn φ erfüllbar ist.
- Man kann gut „über die Alternativen in der Reduktion Buch führen“.

Englisch vs. Deutsch

Englisch	Deutsch	
the tableau	das Tableau	
the tableaux	die Tableaus	
the tableau(x) calculus	der Tableau-Kalkül	(nicht „das“)
	das Tableau-Verfahren	

Der Tableau-Kalkül hat zwei Gruppen von Regeln:

konjunktive Regeln: (Idee: um eine $\alpha \wedge \beta$ erfüllende Belegung zu kontruieren, muß man eine Belegung konstruieren, die sowohl α als auch β erfüllt)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}} \qquad \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \qquad \frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\begin{array}{c}\neg\alpha\\ \neg\beta\end{array}} \qquad \frac{\neg(\alpha \to \beta)}{\begin{array}{c}\alpha\\ \neg\beta\end{array}}$$

disjunktive Regeln: (Idee: um eine $\neg(\alpha \wedge \beta)$ erfüllende Belegung zu konstruieren, muß man eine Belegung konstruieren, die $\neg\alpha$ oder $\neg\beta$ erfüllt)

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \mid \neg\beta} \qquad \frac{\alpha \vee \beta}{\alpha \mid \beta} \qquad \frac{\alpha \to \beta}{\neg\alpha \mid \beta}$$

Diese Regeln werden auf endliche Bäume τ, deren Knoten mit Formeln beschriftet sind, angewandt: Sei v ein Blatt in τ und ψ die Beschriftung eines Knotens oberhalb von v (d.h. eines „Vorfahren“, inkl. v selber).

disjunktive Regel $\dfrac{\psi}{\alpha_1 \mid \alpha_2}$

Wenn weder α_1 noch α_2 oberhalb von v vorkommen, so füge zwei neue Blätter als Kinder von v ein, die mit α_1 bzw. α_2 beschriftet sind.

konjunktive Regel $\dfrac{\psi}{\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$ bzw. $\dfrac{\psi}{\alpha_1}$

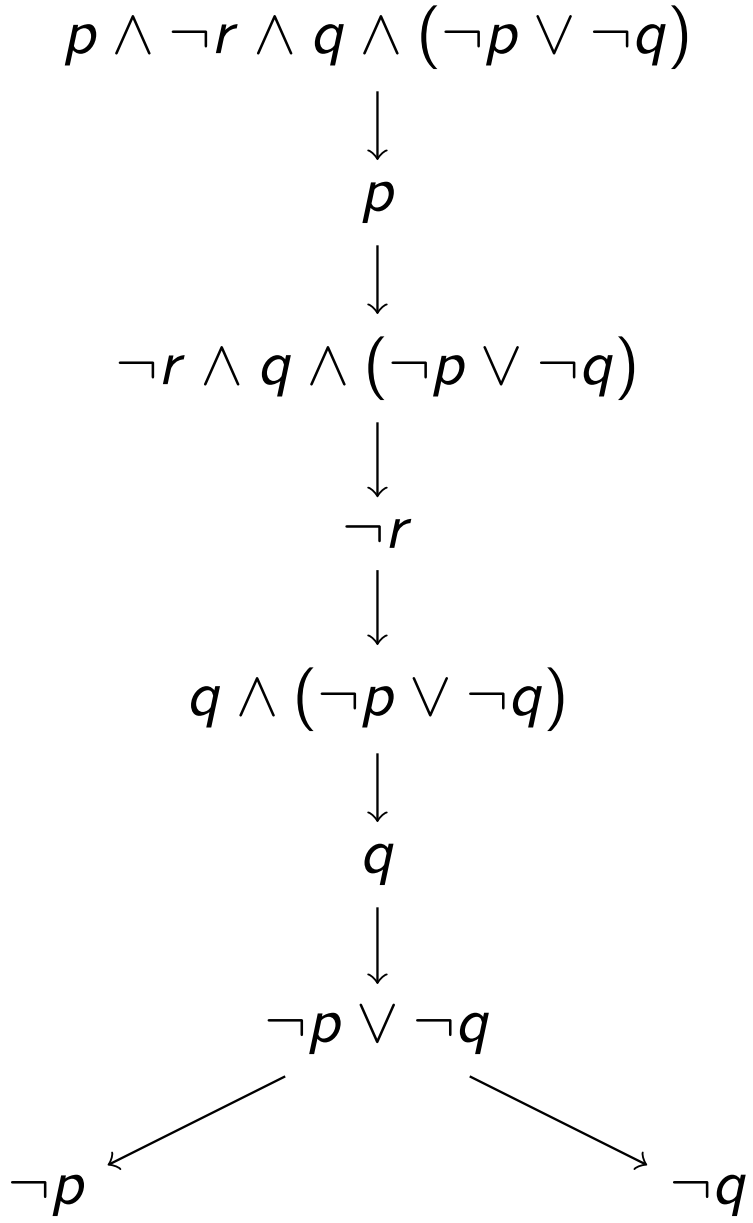
Wenn weder α_1 noch α_2 oberhalb von v vorkommt, so füge einen Pfad der Länge zwei an das (alte) Blatt v an und beschrifte die neuen Knoten mit α_1 und α_2.

Wenn α_1 nicht, aber α_2 oberhalb von v vorkommt, so füge ein Blatt als Kind von v ein und beschrifte es mit α_1.

Wenn α_2 nicht, aber α_1 oberhalb von v vorkommt, so füge ein Blatt als Kind von v ein und beschrifte es mit α_2.

Bzw.: Wenn α_1 nicht oberhalb von v vorkommt, so füge einen Pfad der Länge eins an das Blatt v an und beschrifte den neuen Knoten mit α_1.

Beispiel (vgl. Folie 5.4)



Die zwei unerfüllbaren Literalmengen von Folie 5.4 sind die Literalmengen auf den beiden Ästen dieses Tableaus.

Definition

Für jede Formel φ ist der Baum mit genau einem Knoten, der mit φ beschriftet ist, ein Tableau für φ.

Sei τ ein Tableau für φ und entstehe τ' aus τ durch Anwendung einer Regel. Dann ist τ' ein Tableau für φ.

Ein Ast A des Tableaus τ ist geschlossen, wenn die Formel $\bot$ oder sowohl p als auch $\neg p$ (für eine atomare Formel p) auf A vorkommen. Sonst heißt A offen.

Ein Tableau ist voll expandiert, wenn keine Regel auf einen offenen Ast angewandt werden kann.

Beobachtung: Das Tableau auf Folie 5.9 hat keine offenen Äste (und ist daher auch voll expandiert).

Lemma

Es gibt keine unendliche Folge von Tableaus $(\tau_i)_{i\geq 0}$, so daß τ_{i+1} mittels einer Regel aus τ_i hervorgeht.
Insbes. erhält man aus jeder Formel ein voll expandiertes Tableau.

Beweisidee: In einem Tableau für φ

- kommen nur (möglicherweise negierte) Teilformeln von φ vor,
- enhält kein Ast eine Formel mehrfach
- und hat jeder Knoten höchstens zwei Kinder.

$\Longrightarrow$ Jedes Tableau hat höchstens $2^{2|\varphi|}$ Knoten.
$\Longrightarrow$ Jede „Erweiterungsfolge“ hat höchstens die Länge $4^{|\varphi|}$. □

Heuristik: Um wirklich ein voll expandiertes Tableau zu berechnen, werden üblicherweise nur dann disjunktive Regeln angewandt, wenn keine konjunktive mehr anwendbar ist.

Lemma

Sei τ' Tableau für φ und $\mathcal{B}$ eine Belegung mit $\mathcal{B}(\varphi) = 1$. Dann hat τ' einen Ast A' mit $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ für alle Formeln α auf A'.

Beweis: per Induktion über die Größe von τ'.

IA: Hat τ' nur einen Knoten, so ist dieser mit φ beschriftet.

IS: Hat τ' mehr als einen Knoten, so existiert ein Tableau τ für φ, so daß τ' aus τ durch Anwendung einer Regel (auf den Knoten v) entsteht.
Nach IV hat τ einen Ast A, so daß $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ für alle α auf A.

Liegt v nicht auf A, so setze $A' = A$.

Liegt v auf A und wird eine konjunktive Regel angewandt, so sei A' die Verlängerung von A um die ein oder zwei neuen Knoten. Inspektion der konjunktiven Regeln zeigt, daß A' die gewünschten Eigenschaften hat.

Liege schließlich v auf A und werde eine disjunktive Regel angewandt. Sei weiter ψ die Formel, auf die eine Regel angewandt wird, und seien α und β die beiden Formeln aus der Regel für ψ. Wegen $\mathcal{B}(\psi) = 1$ gilt dann $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ oder $\mathcal{B}(\beta) = 1$; entsprechend wird der Ast A' gewählt. □

Satz

Sei τ ein voll expandiertes Tableau für φ. Dann gilt

$$\varphi \text{ erfüllbar} \iff \tau \text{ hat einen offenen Ast.}$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $\mathcal{B}$ Belegung mit $\mathcal{B}(\varphi) = 1$. Dann hat τ einen Ast A mit $\mathcal{B}(\alpha) = 1$ für alle Formeln α auf A (Folie 5.12). Also kann der Ast A nicht geschlossen sein, d.h. er ist offen.

„$\Leftarrow$“ Sei A ein offener Ast in τ. Definiere eine Belegung $\mathcal{B}$ wie folgt:

$$\mathcal{B}(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls die Formel } p \text{ auf } A \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung. Für alle Formeln α auf A gilt $\mathcal{B}(\alpha) = 1$

Beweis der Behauptung per Induktion über $|\alpha|$

IA $|\alpha| \leq 2 \Longrightarrow \alpha = \bot$, atomar, oder negierte atomare Formel

- $\alpha = \bot$: unmöglich, da A offen
- $\alpha = p$: nach Konstruktion gilt $\mathcal{B}(\alpha) = 1$
- $\alpha = \neg p$: Da A offen ist, kommt p nicht auf A vor

$$\xRightarrow{\text{Konstruktion}} \mathcal{B}(p) = 0 \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1$$

IV Sei $n \geq 3$ und gelte die Behauptung für alle Formeln der Länge $< n$

IS Sei α auf A mit $|\alpha| = n \geq 3$

$\Longrightarrow$ es gibt Formeln β und γ mit

$$\alpha \in \{\beta \wedge \gamma, \neg\neg\beta, \neg(\beta \vee \gamma), \neg(\beta \to \gamma), \neg(\beta \wedge \gamma), \beta \vee \gamma, \beta \to \gamma\}$$

$\Longrightarrow |\beta|, |\gamma| < n$

Wir betrachten diese Fälle einzeln:

- $\alpha = \neg\neg\beta$:
  Da τ voll expandiert ist, kann Regel nicht angewandt werden
  $\Longrightarrow$ β kommt auf A vor
  $\overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(\beta) = 1 \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1$
- $\alpha = \neg(\beta \vee \gamma)$:
  Da τ voll expandiert ist, kann Regel nicht angewandt werden
  $\Longrightarrow$ $\neg\beta$ und $\neg\gamma$ kommen auf A vor
  Wegen $|\neg\beta|, |\neg\gamma| < |\beta \vee \gamma| < |\alpha|$ kann IV angewandt werden:
  $\mathcal{B}(\neg\beta) = \mathcal{B}(\neg\gamma) = 1 \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1$
- $\alpha = \beta \vee \gamma$:
  Da τ voll expandiert ist, kann Regel nicht angewandt werden
  $\Longrightarrow$ β oder γ kommt auf A vor
  $\overset{\text{IV}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(\beta) = 1$ oder $\mathcal{B}(\gamma) = 1 \Longrightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1$
- $\cdots\cdots$ (teilweise Übung) **q.e.d.**

φ liegt auf A

$\xRightarrow{\text{Beh.}} \mathcal{B}(\varphi) = 1$

$\Longrightarrow \varphi$ ist erfüllbar. $\square$

Bemerkung: Wir haben sogar gezeigt, daß eine erfüllende Belegung aus dem Tableau τ bestimmt werden kann.

Tableau-Verfahren der Aussagenlogik

Eingabe: Formel φ
Ausgabe: „unerfüllbar“ falls φ unerfüllbar
erfüllende Belegung falls φ erfüllbar

gehe hierzu wie folgt vor:

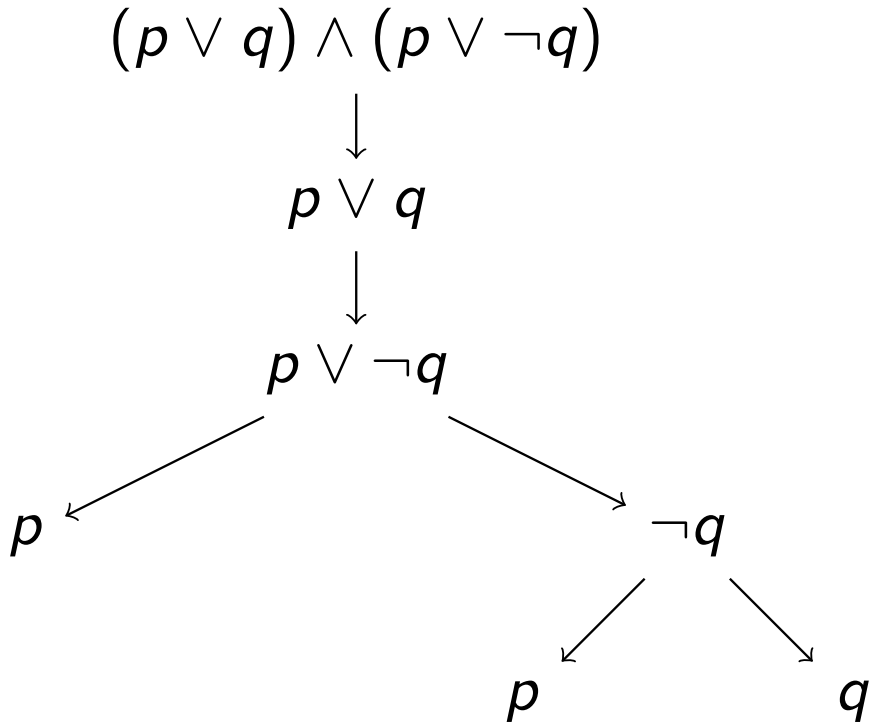
1. berechne ein voll expandiertes Tableau
2. sind alle Äste geschlossen, so gibt „unerfüllbar“ aus
3. sonst berechne aus einem offenen Ast eine Belegung $\mathcal{B}$ und gib diese aus.

Das Verfahren von Folie 4.9 verwendet im negativen Fall immer exponentielle Zeit, das Tableau-Verfahren nur dann, wenn das voll expandierte Tableau wirklich exponentiell groß ist (was oft nicht der Fall ist).

Da es höchstens exponentiell groß werden kann, ist eine höchstens exponentielle Laufzeit garantiert.

Beispiel

Das Tableau auf Folie 5.9 ist voll expandiert und hat keinen offenen Ast. Also ist die Formel $p \wedge \neg r \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q)$ nicht erfüllbar.



Dieses Tableau ist voll expandiert. Da ein offener Ast existiert, ist die Formel erfüllbar.

Beide offenen Äste führen zu der erfüllenden Belegung $\mathcal{B}(p) = 1$ und $\mathcal{B}(q) = 0$

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.26)

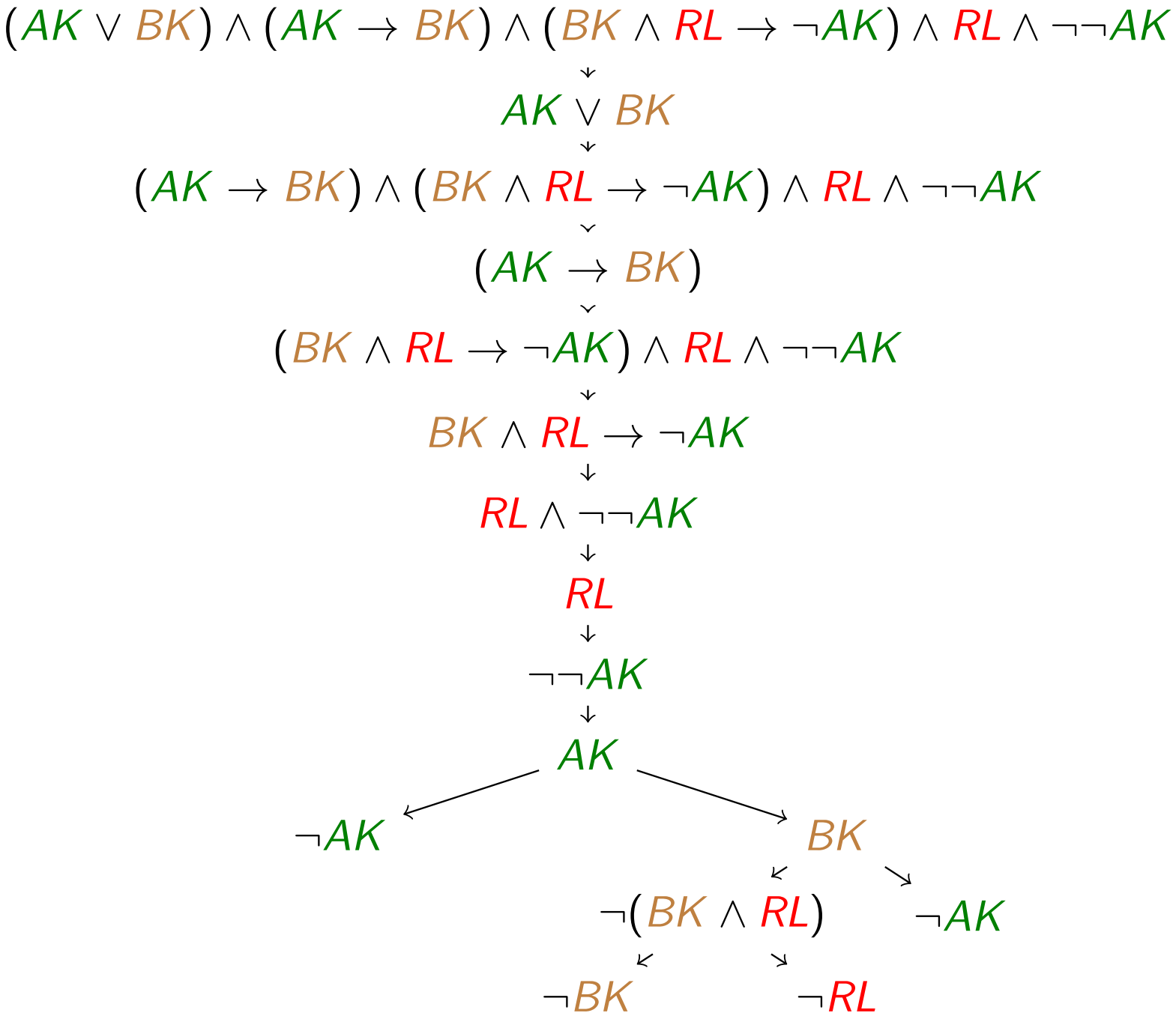
Wir wollen

$$\{(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK), (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK), RL\} \models \neg AK$$

zeigen.

Dies ist äquivalent zur Unerfüllbarkeit der Formel

$$(AK \vee BK) \wedge (AK \rightarrow BK) \wedge (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK) \wedge RL \wedge \neg\neg AK\,.$$


$(AK \vee BK) \wedge (AK \to BK) \wedge (BK \wedge RL \to \neg AK) \wedge RL \wedge \neg\neg AK$
$AK \vee BK$
$(AK \to BK) \wedge (BK \wedge RL \to \neg AK) \wedge RL \wedge \neg\neg AK$
$(AK \to BK)$
$(BK \wedge RL \to \neg AK) \wedge RL \wedge \neg\neg AK$
$BK \wedge RL \to \neg AK$
$RL \wedge \neg\neg AK$
RL
$\neg\neg AK$
AK
$\neg AK$
BK
$\neg(BK \wedge RL)$
$\neg AK$
$\neg BK$
$\neg RL$

Da alle Äste geschlossen sind, ist die Formel unerfüllbar, d.h. wir erhalten

$$(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK),$$
$$\big((BK \wedge RL) \rightarrow \neg AK\big), RL \quad \models \quad \neg AK$$

und können damit sagen

„Wenn Bauteil A oder Bauteil B kaputt ist *und* daraus, daß Bauteil A kaputt ist, immer folgt, daß Bauteil B kaputt ist *und* . . .

. . . dann kann man die Folgerung ziehen: das Bauteil A ist heil.“

Zusammenfassung 5. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- neue Methode, die Gültigkeit einer Folgerung zu entscheiden: der Tableau-Kalkül

kommende Vorlesung

- alternative Methode, Gültigkeit einer Folgerung zu entscheiden: Resolution (Grundlage der logischen Programmierung)