Logik und Logikprogrammierung
Vorlesung 6:
Resolution der AL

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Prof. Dr. Dietrich Kuske

welt offenes Thüringen

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2026/27

Resolution

Folie 4.9: Algorithmus für Frage, ob $\Delta \models \varphi$ gilt (für Δ endlich). Allerdings erfolgt Ausgabe „Ja“ immer erst nach exponentiell vielen Schritten.

Ziel: Verfahren, das schneller ist.

Idee

$$\Delta \models \varphi \text{ gdw. } \Delta \cup \{\neg\varphi\} \text{ unerfüllbar gdw. } \Delta \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$$

$\rightarrow$ wir benötigen Test, ob $\bot$ aus Formelmenge Γ folgt

Der Resolutionskalkül stellt einen solchen Test für Mengen von „Klauseln“ (dies sind Formeln spezieller Form) dar.

Definition

Eine Formel λ ist ein Literal, wenn sie atomar oder Negation einer atomaren Formel ist (z.B. p, $\neg p$).

Eine Formel φ ist eine Klausel, wenn sie $\bot$ oder Disjunktion von Literalen ist (z.B. $\neg p$, $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg q$).

Eine Konjunktion von Klauseln heißt Formel in Konjunktiver Normalform oder in KNF.

Schreibweise

Die Klausel $\varphi = \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_m \vee q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n$ ist äquivalent zur Formel

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_m \wedge \top \rightarrow q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n \vee \bot\,,$$

die wir schreiben als

$$\kappa = \big(\{p_1, \ldots, p_m\} \rightarrow \{q_1, \ldots, q_n\}\big)\,.$$

Spezialfälle:

- $m = 0$: $\emptyset \rightarrow \{q_1, \ldots, q_n\}$
- $n = 0$: $\{p_1, \ldots, p_m\} \rightarrow \emptyset$
- $m = n = 0$ ist nicht möglich
- $\varphi = \bot$: $\emptyset \rightarrow \emptyset$ ist die leere Klausel $\square$

Seien $\kappa_i = (\Phi_i \to \Psi_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ Klauseln. Dann heißt die Klausel $\kappa = (\Phi \to \Psi)$ Resolvente von κ_1 und κ_2, falls es eine atomare Formel p und ein $i \in \{1, 2\}$ gibt mit

- $p \in \Psi_i \cap \Phi_{3-i}$,
- $\Phi = \Phi_i \cup \Phi_{3-i} \setminus \{p\}$ und $\Psi = \Psi_i \setminus \{p\} \cup \Psi_{3-i}$.

Sprechweise: $\Phi \to \Psi$ wird aus $\Phi_1 \to \Psi_1$ und $\Phi_2 \to \Psi_2$ nach p resolviert.

Beispiel

$\emptyset \to \{q, r\}$ ist Resolvente von $\emptyset \to \{p, q\}$ und $\{p\} \to \{r\}$
$\emptyset \to \{q\}$ ist Resolvente von $\emptyset \to \{p, q\}$ und $\{p\} \to \{q\}$
$\square$ ist Resolvente von $\emptyset \to \{p\}$ und $\{p\} \to \emptyset$
$\{p\} \to \{p\}$ ist Resolvente von $\{p\} \to \{p\}$ und $\{p\} \to \{p\}$

$\{q\} \to \{q, r\}$ und $\{p\} \to \{p, r\}$ sind Resolventen von $\{q\} \to \{p, r\}$ und $\{p\} \to \{q\}$.

Beispiel

- Die Klauseln $\kappa_1 = \{p_1, p_2\} \to \{p\}$ und $\kappa_2 = \{p, q_1, q_2, q_3\} \to \{r_1, r_2\}$ stehen für

$$p_1 \wedge p_2 \to p \text{ bzw. } p \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \to r_1 \vee r_2 \,.$$

- Ihre Resolvente $\kappa = \{p_1, p_2, q_1, q_2, q_3\} \to \{r_1, r_2\}$ steht für

$$p_1 \wedge p_2 \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \to r_1 \vee r_2 \,.$$

  Sie entsteht also aus κ_2, indem p durch $p_1 \wedge p_2$ ersetzt wird (woraus nach κ_1 ja p folgt).

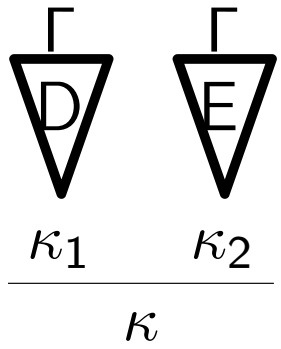
Definition

Sei Γ Klauselmenge und κ Klausel.

$$\kappa$$

ist Resolutions-Ableitung mit Hypothese κ und Konklusion κ.

Sind D und E Resolutions-Ableitungen von κ_1 bzw. κ_2 mit Hypothesen in Γ und ist κ eine Resolvente von κ_1 und κ_2, so ergibt sich die nebenstehende Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in Γ und Konklusion κ:



Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa$, wenn es eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion κ gibt. Wir sagen „κ ist eine Resolutions-Folgerung von Γ“.

Resolutionsableitungen mit Konklusion $\square$ heißen Resolutions-Widerlegung.

Lemma

Es gibt einen Algorithmus, der für eine endliche Klauselmenge Γ und eine Klausel κ feststellt, ob $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \kappa$ gilt.

Beweis: Seien

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\Gamma) &= \Gamma \cup \left\{ \kappa \;\middle|\; \frac{\kappa_1 \quad \kappa_2}{\kappa} \text{ für } \kappa_1, \kappa_2 \in \Gamma \right\} \\ \operatorname{Res}^0(\Gamma) &= \Gamma \\ \operatorname{Res}^{n+1}(\Gamma) &= \operatorname{Res}\big(\operatorname{Res}^n(\Gamma) \cup \Gamma\big) \end{aligned}$$

Γ endlich

$\Longrightarrow$ Menge V der in Γ vorkommenden atomaren Formeln ist endlich

$\Longrightarrow \left|\operatorname{Res}^n(\Gamma)\right| \leq 4^{|V|}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \left|\operatorname{Res}^k(\Gamma)\right| = \left|\operatorname{Res}^{k+1}(\Gamma)\right|$ f.a. $k \geq 4^{|V|}$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash_{\text{Res}} \kappa &\iff \exists k \in \mathbb{N}\colon \kappa \in \operatorname{Res}^k(\Gamma) \\ &\iff \exists k \in \{0, 1, \ldots, 4^{|V|}\}\colon \kappa \in \operatorname{Res}^k(\Gamma) \end{aligned}$$

□

Lemma (Korrektheit der Resolution)

Sei Γ u.U. unendliche Klauselmenge und κ Klausel mit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa$.
Dann gilt $\Gamma \models \kappa$.
Insbes.: Besitzt Γ eine Resolutions-Widerlegung, so ist Γ unerfüllbar.

Beweis: Per Induktion über die Anzahl n der Bildung von Resolventen:

I.A. $n = 0$: dann $\kappa \in \Gamma$ und daher $\Gamma \models \kappa$.

I.S. $n > 0$: dann existieren Klauseln $\kappa_i = (\Phi_i \to \Psi_i)$ mit Resolutionsableitungen aus Γ der Größe $\leq n$, so daß κ Resolvente von κ_1 und κ_2 ist.

$\Longrightarrow$ es gibt $i \in \{1, 2\}$ und $p \in \Psi_i \cap \Phi_{3-i}$ mit

$$\kappa = (\Phi_i \cup \Phi_{3-i} \setminus \{p\} \to \Psi_i \setminus \{p\} \cup \Psi_{3-i}).$$

o.B.d.A. $i = 1$, d.h. $p \in \Psi_1 \cap \Phi_2$ und daher

$$\kappa = (\Phi_1 \cup \Phi_2 \setminus \{p\} \to \Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2).$$

Sei $\mathcal{B}$ Belegung mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1$ f.a. $\gamma \in \Gamma$. Nach I.V. gilt $\mathcal{B}(\kappa_1) = \mathcal{B}(\kappa_2) = 1$. Es gilt

$$\mathcal{B}(\kappa) = \mathcal{B}\left(\bigwedge_{q \in \Phi_1 \cup \Phi_2 \setminus \{p\}} q \rightarrow \bigvee_{r \in \Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2} r\right).$$

Um $\mathcal{B}(\kappa) = 1$ zu zeigen, nehmen wir daher $\mathcal{B}(q) = 1$ f.a. $q \in \Phi_1 \cup \Phi_2 \setminus \{p\}$ an und zeigen, daß es $r \in \Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2$ gibt mit $\mathcal{B}(r) = 1$. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

- $\mathcal{B}(p) = 1$: Dann gilt $\mathcal{B}(q) = 1$ für alle $q \in \Phi_2$. Wegen $\mathcal{B}(\kappa_2) = 1$ existiert $r \in \Psi_2 \subseteq \Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2$ mit $\mathcal{B}(r) = 1$.
- $\mathcal{B}(p) = 0$: Wegen $\mathcal{B}(\kappa_1) = 1$ existiert $r \in \Psi_1$ mit $\mathcal{B}(r) = 1$. Aus $\mathcal{B}(p) = 0$ folgt $r \neq p$ und daher $r \in \Psi_1 \setminus \{p\} \subseteq \Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2$. □

Die Umkehrung des Lemmas gilt leider nicht, d.h. nicht alle semantisch folgenden Klauseln folgen auch mittels Resolution.

Beispiel

Es gilt $\emptyset \models \{p\} \to \{p\}$, denn jede Belegung erfüllt die Klausel $\{p\} \to \{p\}$. Aber es gibt keine Resolutionsableitung mit Hypothesen in $\emptyset$, also gilt insbes. nicht $\emptyset \vdash_{\mathsf{Res}} \{p\} \to \{p\}$.

Wir werden aber zeigen, daß die Umkehrung wenigstens für $\kappa = \square$ gilt, d.h. wir zeigen

$$\Gamma \text{ unerfüllbar } \Longrightarrow \Gamma \text{ besitzt eine Resolutions-Widerlegung.}$$

Lemma (Widerlegungs-Vollständigkeit der Resolution)

Sei Γ endliche Klauselmenge mit $\Gamma \models \square$ (d.h. $\Gamma \models \bot$ bzw. Γ ist unerfüllbar). Dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$, so daß höchstens die Atomformeln p_1, p_2, $\ldots$, p_n in Γ verwendet werden (n existiert, da Γ endlich ist).

Wir zeigen Lemma per Induktion über n

I.A. gilt $n = 0$, so $\Gamma \subseteq \{\square\}$. Da Γ unerfüllbar ist, folgt $\{\square\} = \Gamma$ und damit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square$.

I.S. sei jetzt $n \geq 1$. Dann sind

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \left\{ \Phi \to \Psi \setminus \{p_n\} \;\middle|\; \Phi \to \Psi \in \Gamma, p_n \notin \Phi \right\} \text{ und} \\ \Gamma_1 &= \left\{ \Phi \setminus \{p_n\} \to \Psi \;\middle|\; \Phi \to \Psi \in \Gamma, p_n \notin \Psi \right\} \end{aligned}$$

Klauselmengen, die höchstens die Atomformeln $p_1, \ldots, p_{n-1}$ verwenden.

Behauptung 1 Γ_0 ist unerfüllbar.

Begründung: Angenommen, $\mathcal{B}$ ist Belegung, die Γ_0 erfüllt, also $\mathcal{B}(\Phi \to \Psi \setminus \{p_n\}) = 1$ f.a. $(\Phi \to \Psi) \in \Gamma$ mit $p_n \notin \Phi$.

o.B.d.A. $\mathcal{B}(p_n) = 0$ (da p_n in keiner Klausel aus Γ_0 vorkommt).

Sei $\kappa = (\Phi \to \Psi) \in \Gamma$. Wir unterscheiden die Fälle $p_n \in \Phi$ und $p_n \notin \Phi$:

- $p_n \in \Phi$: dann gilt $\mathcal{B}(\kappa) = 1$ wegen $\mathcal{B}(p_n) = 0$
- $p_n \notin \Phi$: $1 = \mathcal{B}(\Phi \to \Psi \setminus \{p_n\}) \leq \mathcal{B}(\Phi \to \Psi) = \mathcal{B}(\kappa)$

Also ist Γ erfüllbar, im Widerspruch zur Annahme. *q.e.d.*

Nach Induktionsannahme gilt also

$$\Gamma_0 \vdash_{\mathsf{Res}} \square \text{ und (analog) } \Gamma_1 \vdash_{\mathsf{Res}} \square$$

Für eine Klausel $\kappa = (\Phi \to \Psi)$ sei $\kappa^+ = (\Phi \to \Psi \cup \{p_n\})$.

Behauptung 2 Für jede Klausel κ mit $\Gamma_0 \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa$ gilt $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa$ oder $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa^+$.

Begründung: per Induktion über die Resolutionsableitung $\Gamma_0 \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa$.

I.A. $\kappa \in \Gamma_0$. Nach Definition von Γ_0 gilt $\kappa \in \Gamma$ oder $\kappa^+ \in \Gamma$, also $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa$ oder $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa^+$.

I.S. Es gibt Klauseln $\kappa_i = \Phi_i \to \Psi_i$ für $i \in \{1, 2\}$ mit $\Gamma_0 \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa_i$, so daß κ Resolvente von κ_1 und κ_2 ist.

$\stackrel{I.V.}{\Longrightarrow}$ es gibt Mengen Ψ_i' mit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_i \to \Psi_i'$ und $\Psi_i \subseteq \Psi_i' \subseteq \Psi_i \cup \{p_n\}$

κ Resolvente von κ_1 und κ_2
$\Longrightarrow$ es gibt $p \in \Psi_1 \cap \Phi_2$ mit $\kappa = \Phi_1 \cup \Phi_2 \setminus \{p\} \to \Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2$

insbes. $p \in \Psi_1 \subseteq \Psi_1'$ und $p \in \Phi_2$
$\Longrightarrow \kappa' = \Phi_1 \cup \Phi_2 \setminus \{p\} \to \Psi_1' \setminus \{p\} \cup \Psi_2'$ ist Resolvente von $\Phi_i \to \Psi_i'$ für $i = 1, 2$. $\Longrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa'$

Wir haben

$$\begin{aligned}\Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2 &\subseteq \Psi_1' \setminus \{p\} \cup \Psi_2' \\ &\subseteq (\Psi_1 \cup \{p_n\}) \setminus \{p\} \cup (\Psi_2 \cup \{p_n\}) \\ &\subseteq (\Psi_1 \setminus \{p\} \cup \Psi_2) \cup \{p_n\}\end{aligned}$$

d.h. $\kappa' \in \{\kappa, \kappa^+\}$ *q.e.d.*

Wegen $\Gamma_0 \vdash_{\mathsf{Res}} \square$ haben wir also

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square \text{ oder } \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \emptyset \to \{p_n\}$$

und symmetrisch

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square \text{ oder } \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \{p_n\} \to \emptyset$$

Da $\square = \emptyset \to \emptyset$ Resolvente von $\emptyset \to \{p_n\}$ und $\{p_n\} \to \emptyset$ ist, gilt also in jedem Fall $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square$, womit der induktive Beweis abgeschlossen ist. $\square$

Satz (Korrektheit und Vollständigkeit der Resolutions-Widerlegung)

Sei Γ eine u.U. unendliche Klauselmenge Γ. Dann sind äquivalent:

- Γ ist unerfüllbar, d.h. $\Gamma \models \bot$
- $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$

Beweis:

„$\Uparrow$“ Lemma auf Folie 6.9

„$\Downarrow$“ Sei Γ unerfüllbar
$\Longrightarrow$ es gibt $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich und unerfüllbar (Endlichkeitssatz)
$\Longrightarrow$ $\Gamma' \vdash_{\text{Res}} \square$ nach Lemma auf Folie 6.12
$\Longrightarrow$ $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$ $\square$

Folgerungstest für beliebige Formeln

Idee: Um zu testen, ob $\Delta \models \varphi$ gilt (vgl. Folie 6.2), wandeln wir $\Gamma := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$ in Klauselmenge Γ' um, so daß

$$\Delta \models \varphi \iff \Gamma \models \bot \iff \Gamma' \models \bot \iff \Gamma' \vdash_{\mathsf{Res}} \square.$$

Definition

Zwei Formeln α und β heißen äquivalent ($\alpha \equiv \beta$), wenn $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)$ für alle passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt.

Für alle Formeln α und β ergibt sich

$$\alpha \equiv \beta \iff \{\alpha\} \models \beta \text{ und } \{\beta\} \models \alpha$$

und damit nach dem Korrektheits- und Vollständigkeitssatz

$$\alpha \equiv \beta \iff \{\alpha\} \vdash \beta \text{ und } \{\beta\} \vdash \alpha\,.$$

Satz

Für alle Formeln φ_1, φ_2 und φ_3 gelten die folgenden Äquivalenzen:

(1) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$

(2) $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \equiv \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$

(3) $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$

(4) $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$

(5) $\varphi_1 \vee \varphi_1 \equiv \varphi_1$

(6) $(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1) \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2$

(7) $\neg\neg\varphi_1 \equiv \varphi_1$

(8) $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1 \equiv \bot$

(9) $\varphi_1 \vee \neg\varphi_1 \equiv \neg\bot$

(10) $\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$

Beweis: Wir zeigen nur die Äquivalenz (4):
Sei $\mathcal{B}$ beliebige Belegung, die zu $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ paßt.

Dazu betrachten wir die Wertetabelle:

$\mathcal{B}(\varphi_1)$	$\mathcal{B}(\varphi_2)$	$\mathcal{B}(\varphi_3)$	$\mathcal{B}(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$	$\mathcal{B}((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3))$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Äquivalenz (4) gilt aufgrund der Deduktionen auf Folie 2.25. □

Aus dieser Liste von Äquivalenzen können weitere hergeleitet werden:

Beispiel

Für alle Formeln α und β gilt $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Beweis:

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \overset{(7)}{\equiv} \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \overset{(4)}{\equiv} \neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \overset{(7)}{\equiv} \neg\alpha \vee \neg\beta$$

□

Bemerkung

- Korrektheit (einfach): Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen aus dieser Liste hergeleitete Äquivalenzen sind korrekt.
- Vollständigkeit (schwierig): Mit den üblichen Rechenregeln für Gleichungen können alle korrekten Äquivalenzen hergeleitet werden.

Damit kann das Programm von Folie 6.17 vervollständigt werden:

Sei $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$.

Mit Hilfe der Äquivalenzen von Folie 6.18 kann zu jeder Formel $\gamma_i \in \Gamma$ eine äquivalente Formel $\gamma_i' = \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} \kappa_{ij}$ in KNF berechnet werden.

Setze $\Gamma' = \{\kappa_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\}$. Dies ist Menge von Klauseln mit

$$\Gamma \models \bot \overset{\gamma_i \equiv \gamma_i'}{\Longleftrightarrow} \{\gamma_1', \ldots, \gamma_m'\} \models \bot \iff \Gamma' \models \bot \iff \Gamma' \vdash_{\mathsf{Res}} \square\,.$$

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.26)

Wir wollen

$$\{(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK), (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK), RL\} \models \neg AK$$

zeigen.

Dies ist äquivalent zur Unerfüllbarkeit der Formelmenge

$$\Gamma = \{(AK \vee BK), (AK \rightarrow BK), (BK \wedge RL \rightarrow \neg AK), RL, \neg\neg AK\}$$

Eine hierzu äquivalente Klauselmenge:

$$\Gamma' = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \rightarrow \{AK, BK\}, \{AK\} \rightarrow \{BK\}, \{BK, RL, AK\} \rightarrow \emptyset, \\ \emptyset \rightarrow \{RL\}, \emptyset \rightarrow \{AK\} \end{array} \right\}$$

Es ergibt sich die folgende Resolutions-Widerlegung:

$$\dfrac{\dfrac{\emptyset \to \{RL\} \qquad \dfrac{\emptyset \to \{AK\} \qquad \dfrac{\dfrac{\emptyset \to \{AK\} \quad \{AK\} \to \{BK\}}{\emptyset \to \{BK\}} \qquad \{BK, RL, AK\} \to \emptyset}{\{RL, AK\} \to \emptyset}}{\{RL\} \to \emptyset}}{\square}$$

Daher ist Γ' (und somit Γ) unerfüllbar. Also haben wir erneut nachgewiesen, daß unter den genannten Bedingungen das Teil A heil ist.

Probleme:

1. Vollständigkeit: $\Gamma \models \kappa \implies \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \kappa$ gilt nur für $\kappa = \square$.
   man kann zeigen (siehe Zusatzmaterial auf Folien 6.27 ff.): Sei $\kappa = \Phi \to \Psi$ Klausel mit $\Phi \cap \Psi = \emptyset$. Dann gilt

$$\Gamma \models \kappa \iff \exists \Phi' \subseteq \Phi, \Psi' \subseteq \Psi : \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi' \to \Psi' .$$

2. Laufzeit 1: Es gibt unerfüllbare endliche Klauselmengen, so daß jede Resolutions-Widerlegung exponentielle Größe hat; insbes. ist exponentielle Zeit nötig, um sie zu finden (Haken 1985).

3. Laufzeit 2:

$$(p_1^1 \wedge p_2^1) \vee (p_1^2 \wedge p_2^2) \equiv (p_1^1 \vee p_1^2) \wedge (p_1^1 \vee p_2^2) \wedge (p_2^1 \vee p_1^2) \wedge (p_2^1 \vee p_2^2)$$

allgemein:

$$\gamma = \bigvee_{1 \leq i \leq n} (p_1^i \wedge p_2^i) \equiv \bigwedge_{f\,:\,\{1,\ldots,n\} \to \{1,2\}} \bigvee_{1 \leq i \leq n} p_{f(i)}^i$$

Diese Formel in KNF ist exponentiell groß. Man kann zeigen, daß jede zu γ äquivalente Formel in KNF wenigstens 2^n viele Klauseln enthält. Die Berechnung der Klauselmenge Γ' aus $\Gamma = \{\gamma\}$ benötigt also exponentielle Zeit.

wir werden zeigen (Folie 8.2 ff.): man kann Formel γ' in KNF in polynomieller Zeit berechnen, die genau dann erfüllbar ist, wenn γ erfüllbar ist (was für unsere Zwecke ausreicht).

Zusammenfassung 6. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- weitere Methode, die Gültigkeit einer Folgerung zu entscheiden: die Resolution

kommende Vorlesung

- spezielle Formen der Resolution (Eingabe-, Horn- und SLD-)

Zusatzmaterial

Eine Klausel Ψ heißt tautologisch, wenn es eine Atomformel p gibt mit $p, \neg p \in \Psi$ (dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{B}(\Psi) = 1$ für alle Belegungen Ψ gilt).

Lemma

Seien Γ eine Klauselmenge und $\Psi = \{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}\}$ eine nicht-tautologische Klausel. Sei weiter $\Gamma^+ = \Gamma \cup \left\{\{\lambda_i\} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\}$ und Φ eine Klausel mit $\Gamma^+ \models \Phi$. Dann

- gilt $\Phi \in \Gamma^+$ oder
- es existiert eine Klausel $\Psi' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi'$.

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über die Größe der Resolutions-Ableitung $\Gamma^+ \vdash_{\text{Res}} \Phi$.

I.A. $\Phi \in \Gamma^+$. Dann gilt Behauptung des Lemmas trivialerweise.

I.S. Sei Φ Resolvente von Φ_1 und Φ_2 mit $\Gamma^+ \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma^+ \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2$.

Dann existiert ein Literal λ mit $\lambda \in \Phi_1$, $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ und
$\Phi = \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}$.

Für Φ_1 bestehen drei Möglichkeiten (analog für Φ_2):

1. $\Phi_1 \in \Gamma$
2. es gibt $1 \leq i \leq n$ mit $\Phi_1 = \{\lambda_i\}$
3. $\Phi_1 \notin \Gamma^+$.

Es ergeben sich 9 mögliche Kombinationen, die wir einzeln behandeln müssen.

Fall 1: $\Phi_1 \in \Gamma$.

Fall 1.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Setze $\Psi' = \emptyset$. Dann gelten

- $\{\Phi_1, \Phi_2\} \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi = \Phi \cup \Psi'$ und
- $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2$

woraus sich $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi \cup \Psi'$ ergibt.

Fall 1.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Setze $\Psi' = \{\overline{\lambda}_j\} \subseteq \Psi$.

Wegen $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ folgt $\overline{\lambda} = \lambda_j$ und daher $\overline{\lambda}_j = \lambda \in \Phi_1$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \\ &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \emptyset \end{aligned}$$

und daher

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_1 = \Phi \cup \{\lambda\} = \Phi \cup \{\overline{\lambda}_j\} = \Phi \cup \Psi' \,.$$

Fall 1.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsannahme existiert $\Psi_2' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Setze $\Psi' = \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \subseteq \Psi_2' \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \cup \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \\ &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \left(\Phi_2 \cup \Psi_2'\right) \setminus \{\overline{\lambda}\}, \end{aligned}$$

d.h. $\Phi \cup \Psi'$ ist Resolvente von Φ_1 und $\Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Aus $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_1$ und $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$ ergibt sich also $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi \cup \Psi'$.

Fall 2: $\Phi_1 = \{\lambda_i\}$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Fall 2.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Dies ist symmetrisch zum Fall 1.2

Fall 2.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aus $\lambda \in \Phi_1$ und $\overline{\lambda} \in \Phi_2$ folgt $\lambda_i = \overline{\lambda}_j$.

Wegen $\lambda_i, \lambda_j \in \Psi$ ist Ψ also tautologisch, im Widerspruch zur Annahme.

Damit kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsannahme existiert $\Psi_2' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Setze $\Psi' = \Psi_2' \cup \{\overline{\lambda}\} = \psi_2' \cup \{\overline{\lambda}_i\} \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \cup \Psi_2' \cup \{\overline{\lambda}\} \\ &= \emptyset \cup \Phi_2 \cup \Psi_2' \text{ denn } \overline{\lambda} \in \Phi_2 \end{aligned}$$

und damit $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2' = \Phi \cup \Psi'$.

Fall 3: $\Phi_1 \notin \Gamma^+$.

Nach Induktionsanname existiert $\Psi_1' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_1 \cup \Psi_1'$.

Fall 3.1: $\Phi_2 \in \Gamma$. Dies ist symmetrisch zum Fall 1.3

Fall 3.2: $\Phi_2 = \{\lambda_j\}$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dies ist symmetrisch zum Fall 2.2

Fall 3.3: $\Phi_2 \notin \Gamma^+$.

Nach der Induktionsannahme existiert $\Psi_2' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Setze $\Psi' = \Psi_1' \setminus \{\lambda\} \cup \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \subseteq \Psi$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi \cup \Psi' &= \Phi_1 \setminus \{\lambda\} \cup \Phi_2 \setminus \{\overline{\lambda}\} \cup \Psi_1' \setminus \{\lambda\} \cup \Psi_2' \setminus \{\overline{\lambda}\} \\ &= (\Phi_1 \cup \Psi_1') \setminus \{\lambda\} \cup (\Phi_2 \cup \Psi_2') \setminus \{\overline{\lambda}\} \end{aligned}$$

Also ist $\Phi \cup \Psi'$ Resolvente von $\Phi_1 \cup \Psi_1'$ und $\Phi_2 \cup \Psi_2'$.

Aus $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_1 \cup \Psi_1'$ und $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi_2 \cup \Psi_2'$ folgt also $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi'$. □

Satz

Sei Γ Klauselmenge und Ψ nicht-tautologische Klausel mit $\Gamma \models \Psi$. Dann existiert $\Psi' \subseteq \Psi$ mit $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Psi'$.

Beweis: Seien $\Psi = \left\{\overline{\lambda_i} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$ und $\Gamma^+ = \Gamma \cup \left\{\{\lambda_i\} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$.

Wegen $\Gamma \models \Psi$ gilt $\Gamma \models \bigvee_{1 \leq i \leq n} \overline{\lambda}_i$.
$\Longrightarrow \Gamma \cup \{\neg \bigvee_{1 \leq i \leq n} \overline{\lambda}_i\}$ unerfüllbar
$\Longrightarrow \Gamma \cup \{\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \lambda_i\}$ unerfüllbar
$\Longrightarrow \Gamma^+ := \Gamma \cup \left\{\{\lambda_i\} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\}$ unerfüllbar

Es gilt also $\Gamma^+ \models \square$. Aus der Widerlegungs-Vollständigkeit der Resolution (Folie 6.12) ergibt sich $\Gamma^+ \vdash_{\text{Res}} \square$.
Mit $\Phi = \square$ ergibt das vorherige Lemma

$$\Gamma \vdash_{\text{Res}} \Phi \cup \Psi' = \Psi'$$

für ein $\Psi' \subseteq \Psi$. $\square$