Logik und Logikprogrammierung
Vorlesung 7:
Eingabe-, Horn- und SLD-Resolution der AL

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Prof. Dr. Dietrich Kuske

welt offenes Thüringen

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2026/27

Eingabe-Resolution

Resolutions-Ableitungen können sehr komplizierte Bäume sein, die Suche nach ihnen ist dementsprechend schwer.

Ziel: Beschränkung auf „einfache Ableitungen“

Definition

Eine Eingabe-Ableitung ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Knoten Blatt oder Vater eines Blattes ist (für ein Beispiel siehe Folie 6.23).

Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Eingabe}} \kappa$ wenn es eine Eingabe-Ableitung mit Hypothesen aus Γ und Konklusion ψ gibt.

Beispiel

Sei $\Gamma = \{\emptyset \to \{p,q\}, \{p\} \to \{q\}, \{q\} \to \{p\}, \{p,q\} \to \emptyset\}$.

- Γ ist unerfüllbar, denn es gilt $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square$:

$$\dfrac{\dfrac{\emptyset \to \{p,q\} \quad \{p\} \to \{q\}}{\emptyset \to \{q\}} \quad \dfrac{\{q\} \to \{p\} \quad \{p,q\} \to \emptyset}{\{q\} \to \emptyset}}{\square}$$

- es gilt jedoch nicht $\Gamma \vdash_{\mathsf{Eingabe}} \square$: es gibt keine Klauseln $\kappa_1 \in \Gamma$ und κ_2, so daß $\square$ Resolvente von κ_1 und κ_2 ist.

Der Vollständigkeitssatz von Folie 6.16 gilt also nicht für Eingabe-Ableitungen.

Hornklauseln (Alfred Horn, 1918–2001)

In vielen Situationen reichen Klauseln der Form $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} \to \{q\}$ bzw. $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} \to \emptyset$. Für solche Situationen werden wir zeigen, daß die Horn-Resolution (eine Verschärfung der Eingabe-Resolution) ausreicht.

Außerdem: Grundlage der logischen Programmierung.

Aus Alfred Horns Nachruf:
„... Horn clauses ... became important in the 1970s in computational logic... Professor Horn was amused to hear of this application for his research but he never owned a personal computer himself ... He believed all worthwhile information could most easily be obtained at the public library.“

Definition

Eine Hornklausel ist eine Klausel $\kappa = \Phi \rightarrow \Psi$ mit $|\Psi| \leq 1$.

Schreibweise: für $\Phi \rightarrow \{q\}$ schreiben wir $\Phi \rightarrow q$,
für $\Phi \rightarrow \emptyset$ schreiben wir $\Phi \rightarrow \bot$

Die Hornklausel $\Phi \rightarrow r$ heißt

- negativ, wenn $r = \bot$,
- positiv, definit oder Regel, wenn $r \neq \bot$ und
- Fakt, wenn $\Phi = \emptyset$ und $r \neq \bot$.

Beobachtung

Sei κ eine Resolvente der Hornklauseln $\kappa_i = \Phi_i \rightarrow r_i$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. κ_1 oder κ_2 ist (oder beide sind) positiv.
2. κ ist Hornklausel.
3. Sind κ_1 und κ_2 positiv, so ist auch κ positiv.
4. Ist κ_1 positiv und κ_2 negativ (oder umgekehrt), so ist Ψ negativ.
5. Die leere Klausel $\square$ ist eine negative Hornklausel.

Begründung:

1. Da κ_1 und κ_2 eine Resolvente haben, ist (o.B.d.A.) r_1 Atomformel mit $r_1 \in \Phi_2$ und $\kappa = \Phi_1 \cup \Phi_2 \setminus \{r_1\} \to r_2$.
   Insbesondere ist κ_1 positiv.
2. klar, da r_2 Atomformel oder $\bot$
3. κ_2 positiv
   $\Longrightarrow r_2 \neq \bot$
   $\Longrightarrow \kappa$ ist positiv.
4. κ_2 negativ
   $\Longrightarrow r_2 = \bot$
   $\Longrightarrow \kappa$ negative
5. Klausel $\square = (\emptyset \to \emptyset) = (\emptyset \to \bot)$ ist negative Hornklausel. $\square$

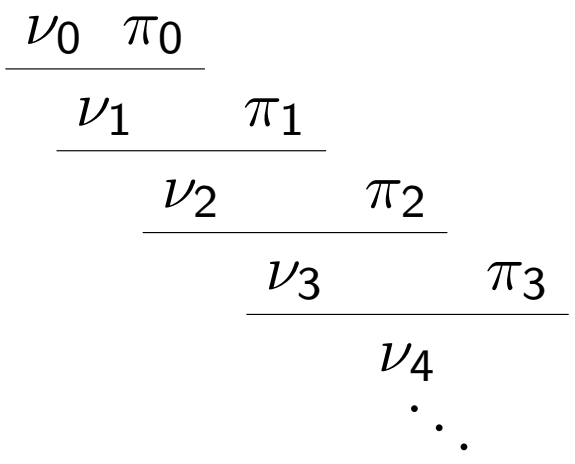
Definition

Sei Γ Menge von Hornklauseln. Eine Horn-Ableitung ist eine Resolutions-Ableitung, in der keine positiven Resolventen auftreten.

Wir schreiben $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \kappa$, wenn es eine Horn-Ableitung gibt mit Hypothesen in Γ und Konklusion κ.

Beobachtung

Da es keine Resolvente von zwei negativen Hornklauseln gibt, ist die allgemeine Form einer Horn-Ableitung also folgendermaßen, wobei die Hornklauseln ν_i negativ und die Hornklauseln π_i positiv sind (mit $\nu_0, \pi_i \in \Gamma$ für alle i):



Daher ist jede Horn-Ableitung auch eine Eingabe-Ableitung.

Plan

Für Klauselmengen Γ gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square\,.$$

Wir wollen zeigen: Ist Γ Menge von Hornklauseln, so gilt sogar

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \iff \Gamma \vdash_{\mathsf{Horn}} \square\,.$$

Hierfür reicht es zu zeigen:

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square \iff \Gamma \vdash_{\mathsf{Horn}} \square\,.$$

Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist trivial, die komplizierte Implikation „$\Rightarrow$“ wird gezeigt, indem die Resolutions-Ableitung in eine Horn-Ableitung „umgebaut“ wird. Hierzu zunächst ein Beispiel.

Beispiel

Betrachte die folgende Resolutions-Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{p,q,r\} \to \bot \quad \dfrac{\{p\} \to q \quad \emptyset \to p}{\emptyset \to q}}{\{p,r\} \to \bot} \quad \{q\} \to p}{\{r,q\} \to \bot} \quad \{r\} \to q}{\{r\} \to \bot} \quad \{s\} \to r}{\{s\} \to \bot} \quad \emptyset \to \{s\}}{\square}$$

- alle Hypothesen sind Hornklauseln (und daher sind alle vorkommenden Klauseln Hornklauseln)
- die Konklusion ist $\square$
- es handelt sich um keine Horn-Ableitung, da die positive Hornklausel $\emptyset \to q$ eine Resolvente ist.
- Mit der negativen Resolvente $\{p,r\} \to \bot$ beginnt eine Horn-Ableitung.

Im ersten (problematischen) Teil der Resolutions-Ableitung

$$\dfrac{\{q,p,r\} \to \bot \qquad \dfrac{\{p\} \to q \quad \emptyset \to p}{\emptyset \to q}}{\{p,r\} \to \bot}$$

- werden zunächst die zwei positiven Hornklauseln $\{p\} \to q$ und $\emptyset \to p$ zu $\emptyset \to q$ „kombiniert“
- und dann deren „Kombination“ auf die negative Hornklausel $\{q,p,r\} \to \bot$ „angewandt“.
- Das Ergebnis ist $\{p,r\} \to \bot$.

Dieser problematische Teil wird „umgebaut“ zu

$$\dfrac{\dfrac{\{q,p,r\} \to \bot \quad \{p\} \to q}{\{p,r\} \to \bot} \qquad \emptyset \to p}{\{r\} \to \bot}$$

wobei jetzt

- die negative Hornklausel $\{q,p,r\} \to \bot$ nacheinander mit $\{p\} \to q$ und mit $\emptyset \to p$ „kombiniert“ werden.
- Das Ergebnis ist $\{r\} \to \bot$.

Das Ergebnis ist also „kleiner“ geworden.

Da das Ergebnis des 1. Teils durch den „Umbau“ verkleinert wurde, muß sich auch der 2. Teil ändern. Hierzu löschen wir all das, was „keinen Sinn mehr ergibt“:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\not{p}, r\} \to \bot \quad \{\not{q}\} \to \not{p}}{\{r, \not{q}\} \to \bot} \quad \{\not{r}\} \to \not{q}}{\{r\} \to \bot} \quad \{s\} \to r}{\{s\} \to \bot} \quad \emptyset \to s}{\square}$$

Damit haben wir die folgende Horn-Ableitung aus dem neuen Ergebnis $\{r\} \to \bot$ (ohne neue positive Hypothesen) mit Konklusion $\square$:

$$\dfrac{\dfrac{\{r\} \to \bot \quad \{s\} \to r}{\{s\} \to \bot} \quad \emptyset \to \{s\}}{\square}$$

Zusammengenommen ergibt sich die folgende Horn-Ableitung ohne neue Hypothesen mit Konklusion $\square$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{p,q,r\} \to \bot \quad \{p\} \to q}{\{p,r\} \to \bot} \quad \emptyset \to \{p\}}{\{r\} \to \bot} \quad \{s\} \to r}{\{s\} \to \bot} \quad \emptyset \to \{s\}}{\square}$$

Das folgende Lemma verallgemeinert das „Umsortieren“ im ersten Teil:

Lemma

Seien π_1, π_2, π, ν_0 und ν_1 Hornklauseln, so daß

- π positiv und Resolvente von π_1 und π_2 ist und
- $\nu_1 = \Psi_1 \to \bot$ negativ und Resolvente von ν_0 und π ist.

$$\dfrac{\nu_0 \qquad \dfrac{\pi_1 \quad \pi_2}{\pi}}{\nu_1}$$

Dann existieren $i \in \{1, 2\}$ und Hornklauseln ν' und ν'_1, so daß

- ν' negativ und Resolvente von ν_0 und π_i ist und
- $\nu'_1 = \Psi'_1 \to \bot$ negative mit $\Psi'_1 \subseteq \Psi_1$ und Resolvente von π_{3-i} und ν' ist.

$$\dfrac{\dfrac{\nu_0 \quad \pi_i}{\nu'} \qquad \pi_{3-i}}{\nu'_1}$$

Beweis

Seien $\pi_i = \Phi_i \to p_i$ mit p_i Atomformel und $\nu_i = \Psi_i \to \bot$.

π Resolvente von π_1 und π_2
$\Longrightarrow$ (zur notationiellen Vereinfachung)
$p_2 \in \Phi_1$ und $\pi = (\Phi_1 \setminus \{p_2\} \cup \Phi_2) \to p_1$

ν_1 Resolvente von ν_0 und π
$\Longrightarrow p_1 \in \Psi_0$ und $\Psi_1 = \Phi_1 \setminus \{p_2\} \cup \Phi_2 \cup \Psi_0 \setminus \{p_1\}$

Wegen $p_1 \in \Psi_0$ ist $\nu' := (\Psi_0 \setminus \{p_1\} \cup \Phi_1) \to \bot$ Resolvente von ν_0 und π_1.

Wegen $p_2 \in \Phi_1 \subseteq \Psi_0 \setminus \{p_1\} \cup \Phi_1$ ist
$\nu_1' := (\underbrace{\Psi_0 \setminus \{p_1, p_2\} \cup \Phi_1 \setminus \{p_2\} \cup \Phi_2}_{=\Psi_1'}) \to \bot$ Resolvente von ν' und π_2.

Es gilt $\Psi_1' \subseteq \Psi_1$. □

Das folgende Lemma verallgemeinert das „Löschen“ im zweiten Teil:

Lemma

Seien Π Menge positiver Hornklauseln, $\nu = (\Psi \to \bot)$ und $\nu' = (\Psi' \to \bot)$ negative Hornklauseln mit $\Psi' \subseteq \Psi$. Dann gilt

$$\Pi \cup \{\nu\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box \implies \Pi \cup \{\nu'\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box$$

Beweis: induktiv über die Größe der Horn-Ableitung von $\Box$ aus $\Pi \cup \{\nu\}$.

IA Die kleinstmögliche Horn-Ableitung mit Konklusion $\Box$ hat die Hypothese $\Box$. Da $\Box$ negativ ist, folgt $\nu = \Box$, also $\Psi' = \Psi$ und damit $\nu' = \nu$, womit die Aussage $\Pi \cup \{\nu'\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box$ trivial wird.

IS Betrachte den ersten Schritt in der Horn-Ableitung von $\Box$ aus $\Pi \cup \{\nu\}$: es gibt $(\Phi \to p) \in \Pi$ mit $p \in \Psi$ und

$$\Pi \cup \left\{\Phi \cup \Psi \setminus \{p\} \to \bot\right\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \Box\,.$$

Diese Hornableitung ist echt kleiner als die aus $\Pi \cup \{\nu\}$.

Wir unterscheiden die Fälle $p \in \Psi'$ und $p \notin \Psi'$:

1. Fall: $p \notin \Psi'$. Dann gilt

$$\Psi' \subseteq \Phi \cup \Psi \setminus \{p\}\,,$$

nach IV folgt

$$\Pi \cup \{\underbrace{\Psi' \to \bot}_{=\nu'}\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \square\,.$$

2. Fall: $p \in \Psi'$. Dann ist

$$\underbrace{\Phi \cup \Psi' \setminus \{p\}}_{\subseteq \Phi \cup \Psi \setminus \{p\}} \to \bot$$

Resolvente von $(\Phi \to p) \in \Pi$ und ν'. Nach der IV folgt

$$\Pi \cup \left\{\Phi \cup \Psi' \setminus \{p\} \to \bot\right\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \square$$

und damit

$$\Pi \cup \{\nu'\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \square\,.$$



Lemma

Für jede Menge Γ von Hornklauseln gilt

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \square \implies \Gamma \vdash_{\mathsf{Horn}} \square\,.$$

Beweis:

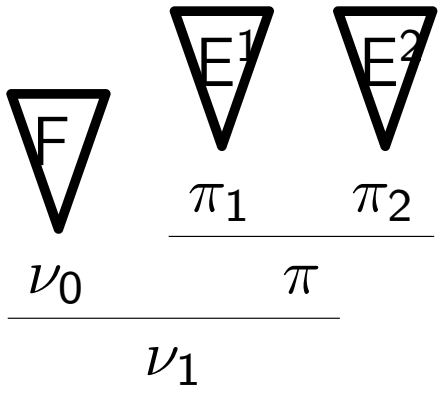
Für eine Resolutionsableitung D sei n_D die Anzahl positiver Resolventen in D, so daß D genau dann Horn-Ableitung ist, wenn $n_D = 0$.

Sei D eine Resolutions-Ableitung von $\square$ mit Hypothesen aus Γ mit dem geringstmöglichen Wert n_D.

Gilt $n_D = 0$, so haben wir $\Gamma \vdash_{\mathsf{Horn}} \square$.

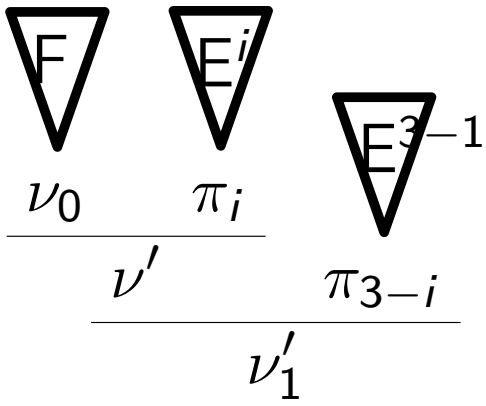
Angenommen $n_D > 0$. Dann existiert eine Resolutions-Ableitung D' der nebenstehenden Gestalt mit

- $n_D = n_{D'}$,
- π_1, π_2 und π sind positive Hornklauseln,
- ν_0 und $\nu_1 = (\Psi_1 \to \bot)$ sind negative Hornklauseln und
- $\Pi \cup \{\nu_1\} \vdash_{\text{Horn}} \square$, wobei $\Pi \subseteq \Gamma$ die Menge der positiven Hornklauseln aus Γ ist.



Wir werden die Resolutions-Ableitung D' vereinfachen (was das „Umbauen“ des 1. Teils der Resolutions-Ableitung verallgemeinert)

Nach dem Lemma auf Folie 7.15 existieren $i \in \{1, 2\}$ und negative Hornklauseln ν' und $\nu'_1 = \Psi'_1 \to \bot$ mit $\Psi'_1 \subseteq \Psi_1$, so daß sich die nebenstehende Resolutions-Ableitung D'' ergibt:



Wegen $\Pi \cup \{\nu_1\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \square$ und $\Psi'_1 \subseteq \Psi_1$ gilt $\Pi \cup \{\nu'_1\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \square$ nach dem Lemma auf Folie 7.17.

Wir haben also eine Resolutionsableitung D'' für $\Gamma \vdash_{\mathsf{Res}} \nu'_1$ gefunden mit $n_{D''} < n_{D'} = n_D$ und es gilt $\Pi \cup \{\nu'_1\} \vdash_{\mathsf{Horn}} \square$.

Das Zusammensetzen dieser zwei Resolutions-Ableitungen ergibt eine Resolutions-Ableitung mit Hypothesen in Γ, Konklusion $\square$ und $< n_D$ vielen positiven Resolventen, im Widerspruch zur Wahl von D. $\square$

Satz

Sei Γ Menge von Hornklauseln. Dann sind äquivalent

- Γ ist unerfüllbar.
- $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \square$.

Beweis:

Angenommen, Γ ist unerfüllbar, d.h. $\Gamma \models \bot$. Dann gilt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$. Aus dem eben bewiesenen Lemma erhalten wir $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \square$.

Gilt umgekehrt $\Gamma \vdash_{\text{Horn}} \square$, so folgt $\Gamma \vdash_{\text{Res}} \square$. Daher ist Γ unerfüllbar. $\square$

Beweis einer Folgerung: Beispiel (vgl. Folie 1.26)

Ziel ist es, die folgende Folgerung zu zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL\} \models \neg AK$$

Lemma auf Folie 3.9: man muß Unerfüllbarkeit der folgenden Menge zeigen:

$$\{(AK \vee BK), (AK \to BK), (BK \wedge RL \to \neg AK), RL, \neg\neg AK\}$$

Eine hierzu äquivalente Klauselmenge:

$$\Gamma' = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \to \{AK, BK\}, \{AK\} \to \{BK\}, \{BK, RL, AK\} \to \emptyset, \\ \emptyset \to \{RL\}, \emptyset \to \{AK\} \end{array} \right\}$$

Dies ist keine Menge von Hornklauseln ☹!

Idee: ersetze BK durch $\neg BH$ in allen Formeln.

Ergebnis:

- Aus $AK \vee BK$ wird $AK \vee \neg BH \mathrel{\hat{=}} \{BH\} \to AK$.
- Aus $AK \to BK$ wird $AK \to \neg BH \equiv \neg AK \vee \neg BH \mathrel{\hat{=}} \{AK, BH\} \to \bot$.
- Aus $BK \wedge RL \to \neg AK$ wird
  $\neg BH \wedge RL \to \neg AK \equiv BH \vee \neg RL \vee \neg AK \mathrel{\hat{=}} \{RL, AK\} \to BH$
- $RL \mathrel{\hat{=}} \emptyset \to RL$
- $\neg\neg AK \equiv AK \mathrel{\hat{=}} \emptyset \to AK$

Wir müssen also zeigen, daß die folgende Menge von Hornklauseln unerfüllbar ist:

$$\{\{BH\} \to AK, \{AK, BH\} \to \bot, \{RL, AK\} \to BH, \emptyset \to RL, \emptyset \to AK\}$$

Dazu geben wir eine Horn-Ableitung mit Konklusion $\square$ an.

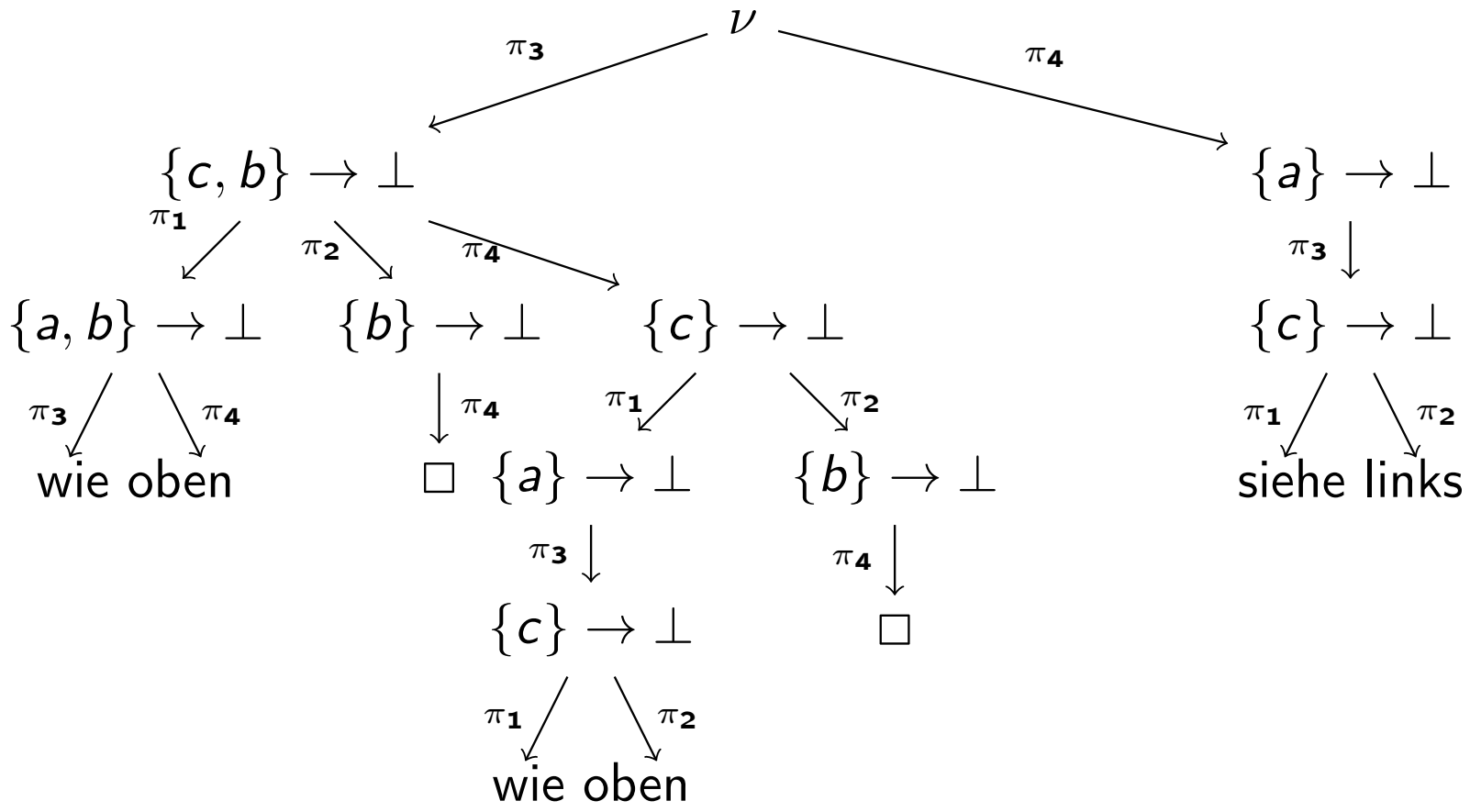
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{AK, BH\} \to \bot \quad \{RL, AK\} \to BH}{\{AK, RL\} \to \bot} \quad \emptyset \to AK}{\{RL\} \to \bot} \quad \emptyset \to RL}{\square}$$

Damit ist die zu zeigende Folgerung tatsächlich gezeigt, das Bauteil A ist also heil!

Beispiel

$$\Gamma = \{\underbrace{\{a,b\} \to \bot}_{\nu}, \underbrace{\{a\} \to c}_{\pi_1}, \underbrace{\{b\} \to c}_{\pi_2}, \underbrace{\{c\} \to a}_{\pi_3}, \underbrace{\emptyset \to b}_{\pi_4}\}$$

alle Horn-Resolutionen aus Γ kann man durch einen Baum beschreiben:



Die Suche nach einer Horn-Ableitung mit Konklusion $\square$ kann grundsätzlich auf zwei Arten erfolgen:

- Breitensuche:
  - findet Horn-Ableitung mit Konklusion $\square$ (falls sie existiert), da Baum endlich verzweigend ist (d.h. die Niveaus sind endlich)
  - hoher Platzbedarf, da ganze Niveaus abgespeichert werden müssen (in einem Binärbaum der Tiefe n kann es Niveaus der Größe 2^n geben)
- Tiefensuche:
  - geringerer Platzbedarf (in einem Binärbaum der Tiefe n hat jeder Ast die Länge $\leq n$)
  - findet existierende Horn-Ableitung mit Konklusion $\square$ nicht immer (siehe Beispiel)

SLD-Resolution: spezielle Form der Tiefensuche:

- in der Hornklausel $\Psi \to r$ wird Menge $\Psi = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ durch Liste $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ ersetzt
- endliche Menge von Hornklauseln Γ wird ebenfalls als Liste $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$ aufgefaßt
- es wird immer Resolvente an erster möglicher Stelle der augenblicklichen negativen Hornklausel mit erster möglicher Eingabeklausel gebildet.

Dies führt zur logischen Programmiersprache PROLOG.

Zusammenfassung 7. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- spezielle Formen der Resolution (Eingabe-, Horn- und SLD-)

kommende Vorlesung

- Tseitin-Konstruktion: schnelle Berechnung einer Formel γ' in KNF aus einer Formel γ, so daß γ' erfüllbar gdw. γ erfüllbar (verwendet für Anwendung der Resolution zur Entscheidung „Gilt $\Gamma \models \varphi$?“ bzw. „Ist Γ unerfüllbar?“)
- Fragestunde