TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Chris Köcher
SS 2021

Automaten und Komplexität – Übung 4

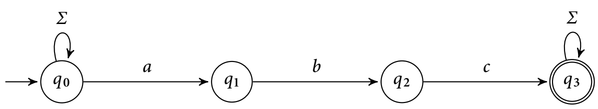
Abgabe: bis Montag, der 14. Juni 2021, um 11:00 Uhr via Moodle.

Aufgabe 1* 2+1+1+1 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Für ein Wort $w = a_1a_2 \dots a_n$ (mit $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$) schreiben wir w^R für das Spiegelwort $w^R := a_n \dots a_2a_1$. Beispielsweise gilt $(aaba)^R = abaa$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir zudem die Spiegelsprache $L^R := \{\vec{w} \mid w \in L\}$.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben!

(a) Gegeben sei der folgende NFA $\mathcal{M}$:



Geben Sie einen NFA an, der die Sprache $L(\mathcal{M})^R$ akzeptiert. Leiten Sie daraus ein Verfahren ab, wie man aus einem beliebigen NFA $\mathcal{M}$ einen NFA mit akzeptierter Sprache $L(\mathcal{M})^R$ berechnet.

(b) Eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ heißt *linkslinear*, wenn $P \subseteq N \times N\Sigma \cup \{\varepsilon\}$ gilt. Geben Sie für den oben angegebenen NFA $\mathcal{M}$ eine linkslineare Grammatik, die $L(\mathcal{M})$ erzeugt.

(c) Gegeben sei die linkslineare Grammatik $\mathcal{G}$ mit Startsymbol A_1 und den folgenden Regeln:

$$A_1 \to A_1c \mid A_2b \mid A_3a \quad A_2 \to A_1b \mid A_2a \mid A_3c \quad A_3 \to \varepsilon\,.$$

Konstruieren Sie einen NFA, der die Sprache $L(\mathcal{G})$ akzeptiert.

(d) Eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ heißt *linear*, wenn $P \subseteq N \times N\Sigma \cup \Sigma N \cup \{\varepsilon\}$ gilt. Geben Sie eine lineare Grammatik $\mathcal{G}$ mit $L(\mathcal{G}) = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ an.

Aufgabe 2* 1+1 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L_i eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}_i$ mit $L(\mathcal{G}_i) = L_i$ an:

(a) $L_1 = \{a^iba^jba^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

(b) $L_2 = \Sigma^* \setminus \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$.

Aufgabe 3* 1+1+1+1+1 Punkte

Betrachten Sie diejenige kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}$ über $\Sigma = \{a, b\}$ mit Startvariable S, die folgenden Ableitungsbaum T ermöglicht und nicht mehr Produktionen enthält, als für T notwendig sind.

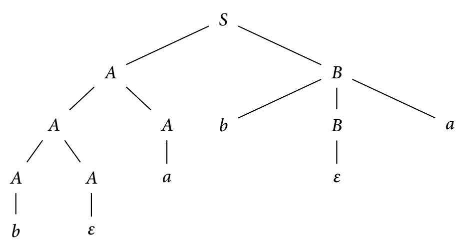
(a) Geben Sie das Blattwort von T an und ermitteln Sie weiterhin die Variablen und Produktionen der Grammatik $\mathcal{G}$.

(b) Geben Sie eine kurze Beschreibung der von $\mathcal{G}$ erzeugten Sprache an.

(c) Konstruieren Sie aus T *zwei* verschiedene Ableitungen des Blattwortes.

(d) Geben Sie einen von T verschiedenen Ableitungsbaum mit demselben Blattwort an.

(e) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}'$ mit $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G})$ so an, dass $\mathcal{G}'$ für jedes $w \in L(\mathcal{G}')$ genau einen Ableitungsbaum mit Blattwort w besitzt.



Bitte wenden!

Aufgabe 4*

1+1+1+1 Punkte

Gegeben sind die folgenden kontextfreien Grammatiken $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ mit Startsymbolen S_1 und S_2:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &: \quad S_1 \to \varepsilon \mid aS_1bb \\ \mathcal{G}_2 &: \quad S_2 \to cd \mid cS_2d\,. \end{aligned}$$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie, dass $aabbbb$ in $L(\mathcal{G}_1)$ enthalten ist durch Angabe einer Ableitung und eines Ableitungsbaums.

(b) Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}_\cup$ mit $L(\mathcal{G}_\cup) = L(\mathcal{G}_1) \cup L(\mathcal{G}_2)$.

(c) Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}_\circ$ mit $L(\mathcal{G}_\circ) = L(\mathcal{G}_1) \cdot L(\mathcal{G}_2)$.

(d) Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}_*$ mit $L(\mathcal{G}_*) = L(\mathcal{G}_1)^*$.

Aufgabe 5*

2+2 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

(a) $L_1 = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

(b) $L_2 = \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$