TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Chris Köcher
SS 2021

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten und Komplexität – Übung 7

Abgabe: bis Montag, der 26. Juli 2021, um 11:00 Uhr via Moodle.

Aufgabe 1*

4 Punkte

Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ als Tupel an, welche bei Eingabe $\text{bin}(n)$ das Wort $\text{bin}(\lfloor \log_2 n \rfloor)$ auf das Band schreibt. Ist die Eingabe 0, so soll Ihre Turingmaschine stattdessen 0 ausgeben. Beschreiben Sie kurz die Funktionsweise Ihrer Maschine. Geben Sie weiterhin die Berechnung von $\mathcal{M}$ auf 101 an.
Zur Erinnerung: Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ist $\text{bin}(n)$ die Binärkodierung von n. Zum Beispiel gilt $\text{bin}(0) = 0$ und $\text{bin}(5) = 101$.

Aufgabe 2*

2+2+2 Punkte

Unter welchen der folgenden Operationen ist die Klasse der semi-entscheidbaren Sprachen abgeschlossen? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

(a) Vereinigung.

(b) Schnitt.

(c) Komplement.

Aufgabe 3*

2+2 Punkte

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $L_1 := \{w \in L_{\text{TM}} \mid \mathcal{M}_w \text{ akzeptiert die Sprache } L((b^*ab^*ab^*)^*)\}$.

(b) $L_2 := \{w \in L_{\text{TM}} \mid \mathcal{M}_w \text{ akzeptiert eine semi-entscheidbare Sprache}\}$.

Hinweis: Verwenden Sie im negativen Falle den Satz von Rice.

Aufgabe 4*

1+1 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Begründen Sie, warum die Abbildung

$$f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \colon w \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } w \in H \\ 0 & \text{, falls } w \notin H \end{cases}$$

keine Reduktion vom Halteproblem H auf die Sprache $\{1\}$ ist.

(b) Begründen Sie, warum die Abbildung

$$g\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \colon w \mapsto \begin{cases} v & \text{, falls } w = av \text{ für ein } a \in \{0,1\} \text{ und } v \in \{0,1\}^* \\ \varepsilon & \text{, falls } w = \varepsilon \end{cases}$$

keine Reduktion von $L(01(01)^*)$ auf $L(1(01)^*)$ ist.

Aufgabe 5*

4 Punkte

Seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $\mathcal{M}$ eine deterministische Turingmaschine mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle Eingaben $x \in L$ hält $\mathcal{M}$ nach höchstens $|x|^2$ vielen Schritten und gibt 1 aus.
- Für alle Eingaben $x \notin L$ hält $\mathcal{M}$ nach höchstens $2^{|x|}$ vielen Schritten und gibt 0 aus.

Gilt $L \in \mathsf{P}$? Begründen Sie Ihre Antwort.