Fachgebiet
Simulation und Optimale Prozesse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Fakultät für Informatik und
Automatisierung
Institut für Automatisierungs-
und Systemtechnik

Praktikum

Versuch OPT-4
„Dynamische hierarchische Optimierung“

Verantwortlicher Hochschullehrer: Prof. Dr.–Ing. habil. P. Li
Versuchsverantwortlicher: Dr.–Ing. S. Hopfgarten

Name,Vorname	**Matrikel-Nr.**
Mitarbeiter	
Datum, Note, Unterschrift	

1 Ziel

Im Rahmen der Vertiefungsausbildung „Systemtechnik“ wird auf verschiedene Methoden zur Ermittlung optimaler Steuerungen eingegangen. Das Problem besteht im Allgemeinen darin, für einen Prozess, der sich durch eine Zustandsgleichung der allgemeinen Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

beschreiben lässt, eine Steuerung $u(t)$ derart zu finden, dass ein Zielfunktional der Form

$$J = \Phi\left(\boldsymbol{x}(t_f)\right) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

minimiert bzw. maximiert wird.

Das Praktikumsprogramm gestattet die Lösung unbeschränkter linear-quadratischer Optimierungsaufgaben (mit fester Zeit), wobei sowohl zentrale als auch dezentrale/hierarchische Ansätze berücksichtigt worden sind. (Im Allgemeinen sind derartige Aufgabenstellungen allerdings nichtlinear.)

Die Verfahren können hinsichtlich Konvergenzgeschwindigkeit, Aufwand und anderer Parameter bewertet werden. Es ist in gewissem Maße möglich, während der Optimierungsrechnungen einzelne Parameter (z.B. Schrittweiten, Abschaltschranken, Wichtungen) zu ändern und so auf die Verfahren Einfluss zu nehmen.

Die ermittelten Zwischenergebnisse sind ständig in grafischer Form verfügbar, damit der Prozess der Annäherung an das Optimum gut verfolgbar ist. Die Verfahren werden auf diese Weise transparent.

2 Realisierung des Praktikums

Das Programm ist zur Nutzung auf PCs in der MATLAB-Kommandosprache entwickelt worden.

Für die Durchführung des Praktikums wurde eine Reihe von Testbeispielen hinterlegt, es ist aber auch möglich, einzelne Parameter zu ändern oder eigene Aufgabenstellungen (bislang mit gewissen Einschränkungen) zu untersuchen. Folgende Methoden der dynamischen Optimierung sind im Rahmen des Praktikums implementiert:

- Zentrale Verfahren
  - Gradientenverfahren mit Richtungsminimierung oder mit konstanter Schrittweite
  - Verfahren der konjugierten Gradienten (Streckfaktorbestimmung nach FLETCHER/REEVES oder HESTENES/STIEFEL) oder POLAK/RIBIERE) mit Richtungsminimierung oder mit konstanter Schrittweite
  - Lösung mit Hilfe der Matrix-RICCATI-Differenzialgleichung
- Hierarchische Verfahren (Koordinierungsverfahren)
  - Wechselwirkungsvorhersagemethode (Interaction prediction method (IPM))
  - Wechselwirkungsbalancemethode (Interaction balance method (IBM))

  Die auf der unteren Ebene einzusetzenden Optimierungsmethoden sind dabei aus dem Pool der zentralen Methoden frei wählbar.

3 Praktikumsvorbereitung

1. Die Prozessgleichung eines einfachen Integrators lautet:

$$\dot{x}(t) = u(t) \tag{3}$$

Der Integrator soll innerhalb des Zeitintervalls $t_0 \le t \le t_f$,$t_0 = 0$, $t_f = 1$ vom Zustand $x(t_0) = 0$ möglichst in den Endzustand $x(t_f)$ mit dem Wert 1 ($x_f = 1$) umgesteuert werden, wobei das Bolza-Funktional

$$J = \frac{1}{2}\left[\bar{q}_1\,(x(t_f) - x_f)^2 + \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right] \tag{4}$$

minimiert werden soll. (Wichtig: Der Endzustand ist für die Berechnung als frei anzusehen. Der Wert für den anzustrebenden Endzustand x_f wird in der Transversalitätsbedingung zur Berechnung des Endkozustandes $p(t_f)$ benötigt.)

Lösen Sie das Problem analytisch! Welche optimalen Trajektorien für die Steuerung und den Zustand ergeben sich jeweils für die beiden Wichtungsfaktoren $\bar{q}_1 = \{2, 50\}$? Welchen Wert hat das Zielfunktional?

2. Die optimale Umsteuerung eines Fahrzeuges (vereinfachte Modellierung als Doppelintegrator; $x_1(t)$ - Weg, $x_2(t)$ - Geschwindigkeit, $u(t)$ - Beschleunigung (jeweils normiert)) soll betrachtet werden. Berechnen Sie die optimale Steuerung und die optimalen Zustandsverläufe analytisch und skizzieren Sie sie bei nachfolgend gegebener Systembeschreibung, den Anfangs- und Endbedingungen sowie dem Zielfunktional!

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{5}$$

mit $t_0 \le t \le t_1$,$t_0 = 0$,$t_f = 1$,$x_1(t_0) = 0$,$x_1(t_f) = 0$,$x_2(t_0) = -1$,$x_2(t_f) = 0$.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

3. Eine Systembeschreibung liege in Form der Prozessgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

mit $t_0 \leq t \leq t_f$,$t_0 = 0$,$t_f = 1$,$x_1(0) = 1$,$x_2(0) = -1$ vor.

Das Zielfunktional sei gegeben durch

$$\begin{aligned} J \;=\; & \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}_f)^T \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} (\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}_f)\right] \\ & +\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\boldsymbol{x}(t)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t)\right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{8}$$

Zeichnen Sie das Signalflussbild dieses Systems! Stellen Sie die Systemgleichung für den Fall auf, dass man das System in zwei (eindimensionale) Teilsysteme zerlegt! (Dabei werden die Zustandsgrößen $x_j(t)$, $j = 1,2$ als Koppelgrößen $v_i(t)$, $i = 1,2$, $i \neq j$ betrachtet. Die Systemgleichung hat damit die Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}(t)$. Notieren Sie auch die Kopplungsleichung in Matrix-Vektor-Notation!

4 Praktikumsdurchführung

1. Integrator

   (a) Lösen Sie das Integratorproblem (Vorbereitungsaufgabe 3.1) mit Hilfe des Programms! (Die Aufgabe ist unter dem Namen **int.m** (Kennzeichen: int) gespeichert.) Anhand dieses äußerst einfachen Beispiels können Sie sich mit dem Umgang mit dem Programm vertraut machen. Führen Sie die erste(n) Untersuchung(en) im Schrittbetrieb aus (Setzen der Variable `stepwise=1` in der Datei dyn_hier_opt.m)!

   (b) Benutzen Sie zunächst das Verfahren der konjugierten Gradienten mit Richtungsminimierung! Wählen Sie verschiedene Methoden zur Streckfaktorenbestimmung! Vergleichen Sie die ermittelten Werte mit den von Ihnen errechneten!

   (c) Benutzen Sie das Verfahren der konjugierten Gradienten mit fester Schrittweite (0.1, 0.02 und 0.01)! Treffen Sie Aussagen bezüglich Konvergenz und Geschwindigkeit!

   (d) Lösen Sie das Problem erneut unter Verwendung des Gradientenverfahrens sowohl mit Richtungssuche als auch fester Schrittweite! Ziehen Sie einen Vergleich zum Einsatz des Konjugierte-Gradienten-Verfahrens!

2. Doppelintegrator

   (a) Lösen Sie das Doppelintegratorproblem (Datei **dint.m**, Kennzeichen: dint) ähnlich der Aufgabenstellung in Vorbereitungsaufgabe 3.2 – hier allerdings mit freiem Endzustand – mit Hilfe der verschiedenen Verfahren der konjugierten Gradienten und der Variablen Metrik (Quasi-Newton-Verfahren)!

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{9}$$

mit $t_0 \leq t \leq t_1\,, t_0 = 0\,, t_1 = 1\,, x_1(t_0) = 0\,, x_{1,f} = 0\,, x_2(t_0) = -1\,, x_{2,f} = 0.$

$$I = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x_1(t_1) - x_{1,f} & x_2(t_1) - x_{2,f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_1) - x_{1,f} \\ x_2(t_1) - x_{2,f} \end{bmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t_1} u^2(t)\,dt\right) \quad (10)$$

(b) Ändern Sie die Werte der Wichtungsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}$ und beobachten Sie die Auswirkungen auf das Erreichen der Endzustände $\mathbf{x}(t_f)$ und die Konvergenz!

(c) Ändern Sie bei gleich bleibenden Wichtungsmatrizen den Endwert des Optimierungshorizontes im Bereich [0.5, 3] und beobachten Sie wieder, wie die geforderten Endzustände erreicht werden!

3. Zerlegtes und unzerlegtes Problem

   (a) Ermitteln Sie zunächst die Lösung des unzerlegten Problems aus Vorbereitungsaufgabe 3.3! (File **sys3u.m**, Kennzeichen: sys3u) mit Hilfe der Matrix-RICCATI-Differenzialgleichung und einem oder mehreren iterativen Verfahren! Vergleichen Sie die Rechenzeiten!

   (b) Lösen Sie das zerlegte Problem (File **sys3z**, Kennzeichen: sys3z) mit Hilfe der Wechselwirkungsvorhersagemethode (interaction prediction method (IPM)) auf der oberen und der Matrix–RICCATI–Differenzialgleichung auf der unteren Ebene!

   (c) Untersuchen Sie den Einfluss der Stärke der Kopplung auf die Konvergenzgeschwindigkeit des zerlegten Verfahrens! Ändern Sie dazu die Matrizen $\mathbf{C}_i$, i=1,2 der Prozessgleichungen der beiden Teilsysteme entsprechend Tabelle 1.

	Teilsystem 1 C_1	Teilsystem 2 C_2
ursprüngliche Aufgabe	2.0	1.0
schwache Kopplung	0.2	0.1
starke Kopplung	4.0	2.0

Tabelle 1: Kopplungsfaktoren

   (d) Untersuchen sie das Verhalten des Algorithmus bei weiter verstärkter Kopplung für $\boldsymbol{C}_1 = 8$ und $\boldsymbol{C}_2 = 4$! Was leitet sich daraus für die Lösung stark verkoppelter Systeme ab? Welche Empfehlungen kann man bei der Zerlegung eines Gesamtsystems in Teilsysteme geben?

   (e) Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Wechselwirkungsbalancemethode (interaction balance method (IBM), File **sys3z.m**, Kennzeichen: sys3z) für die Kopplung der Teilsystme gemäß Tabelle 1 und für die weiter verstärkte Kopplung ($\boldsymbol{C}_1 = 8, \boldsymbol{C}_2 = 4$)! Verwenden Sie als Schrittweite auf der oberen Ebene die Werte 0.1 und 1!

5 Programm–Parameter

Die Änderung der Systemparameter erfolgt durch Anpassung in den oben erwähnten Dateien (z. B. int.m). Verfahrensparameter können in der Datei dyn_hier_opt.m verändert werden. Dabei sind folgende Bezeichnungen der Größen gewählt worden:

`t0, t_f`	-	Startzeit t_0 und Endzeit t_f
`sys(i).x0,`		
`sys(i).x_f`*)	-	Startwert $\boldsymbol{x}(0)$ und gewünschter Endwert $\boldsymbol{x}_f$ der Zustandsvektoren *) (`i` ist durch den entsprechenden Teilsystemindex zu ersetzen)
`sys(i).u0,`		
`sys(i).v0` *)	-	Anfangssteuerung $\boldsymbol{u}(0)$ und Anfangskopplung $\boldsymbol{v}(0)$
`eps_g_phi_lam`	-	Abbruchschranke bei Wechselwirkungsbalancemethode
`eps_norm_x`	-	Abbruchschranke bei Wechselwirkungsvorhersagemethode
`epsilon`		Abbruchschranke bei gradientbasierten Verfahren auf der unteren Ebene
`alpha`	-	Schrittweite (bzw. Anfangsschrittweite) bei iterativen Verfahren in den Teilsystemen
`alpha_coord`	-	Schrittweite auf Koordinatorebene

Systemgleichung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

Zielfunktional

$$J = \frac{1}{2}\left\{ \left[(\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{x}_f)^T \bar{\boldsymbol{Q}}\ (\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{x}_f)\right] + \int_{t_0}^{t_f} [\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{S}\boldsymbol{v}]\ \mathrm{d}t \right\}$$

Koppelgleichung

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1(\neq i)}^{N} \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{x}_j$$

mit $\boldsymbol{W}$ - Einheitsmatrix, $\boldsymbol{T}_{ij}$ - Koppelmatrix (entspricht $\boldsymbol{K}_{ij}$ im Vorlesungsskript).

Literatur

[1] S. Hopfgarten. *Vorlesung Hierarchische Steuerungssysteme.* TU Ilmenau.

[2] P. Li. *Vorlesung Prozessoptimierung 2/Dynamische Prozessoptimierung.* TU Ilmenau.

[3] H. Puta. *Optimale Steuerung dynamischer Prozesse in zentralisierten Steuerungssystemen.* In: *Taschenbuch Elektrotechnik.* 3. Auflage, Verlag Technik, Berlin 1987 Bd. 1.

[4] K. Reinisch. *Hierarchische und dezentrale Steuerungssysteme.* In: *Taschenbuch Elektrotechnik.* 3. Auflage, Verlag Technik, Berlin 1987 Bd. 1.

[5] *Lexikon der Optimierung.* Akademie–Verlag, Berlin 1986.