Optimale Steuerung 2 / Prozessoptimierung 2
Dynamische Prozessoptimierung

Kapitel 1: Einführung

Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Luft- und Raumfahrtindustrie

Dynamische Vorgänge:

- Start
- Landung
- Flugbahnregelung


Chemieindustrie
Dynamische Vorgänge:
• Anfahren
• Abfahren
• Produktwechsel
• Feedwechsel

Industrieroboter

Dynamische Vorgänge:

- **Positionieren**
- **Transportieren**

Beispiel: Optimale Ersatzstrategie

Ziel: Kostenminimierung in den nächsten 5 Jahren

Randbedingungen:

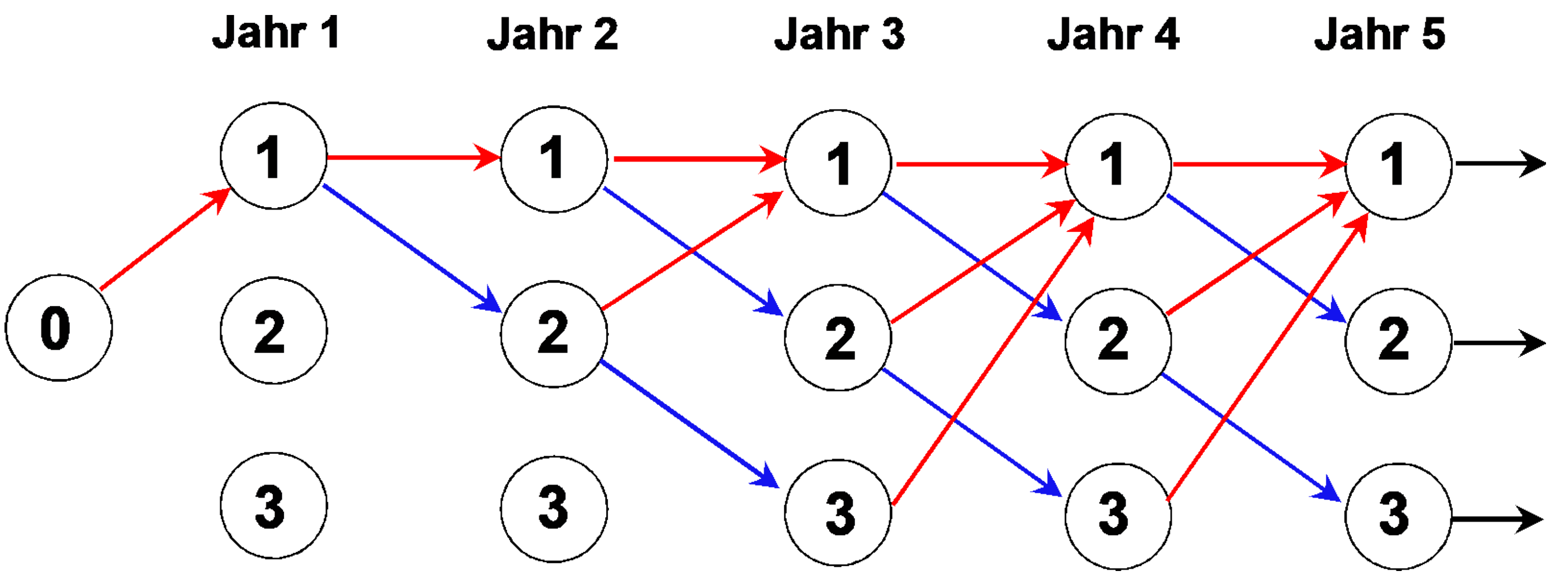
- Ein neues Auto kostet 100.000 €
- Kosten der Instandhaltung:

  1. Jahr: 6.000 €, 2. Jahr: 8.000 €, 3. Jahr: 12.000 €

- Verkaufspreis:

  1. Jahr: 80.000 €, 2. Jahr: 60.000 €, 3. Jahr: 50.000 €

Problemdarstellung:



Definition:

t : Jahr $(1, 2, \ldots, 5)$

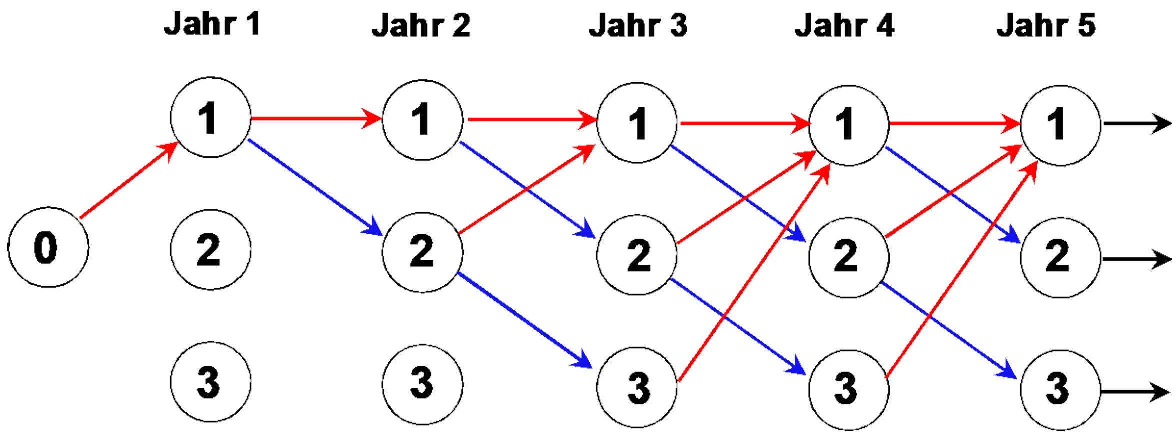
x : Alter des Autos $(1, 2, 3)$

$f_t(x)$: Minimale Kosten vom Jahr t bis zum Jahr 5 beim Zustand x

Welche ist die optimale Strategie, damit die Gesamtkosten für 5 Jahre minimiert werden können?

Fachgebiet Prozessoptimierung

Analyse des Problems:



Man fängt hinten mit Jahr 5 an:

Jahr 5: das Auto wird auf jeden Fall verkauft.

Die Kosten: $f_5(1) = -80, \quad f_5(2) = -60, \quad f_5(3) = -50$

Jahr 4: es gibt 3 Möglichkeiten:

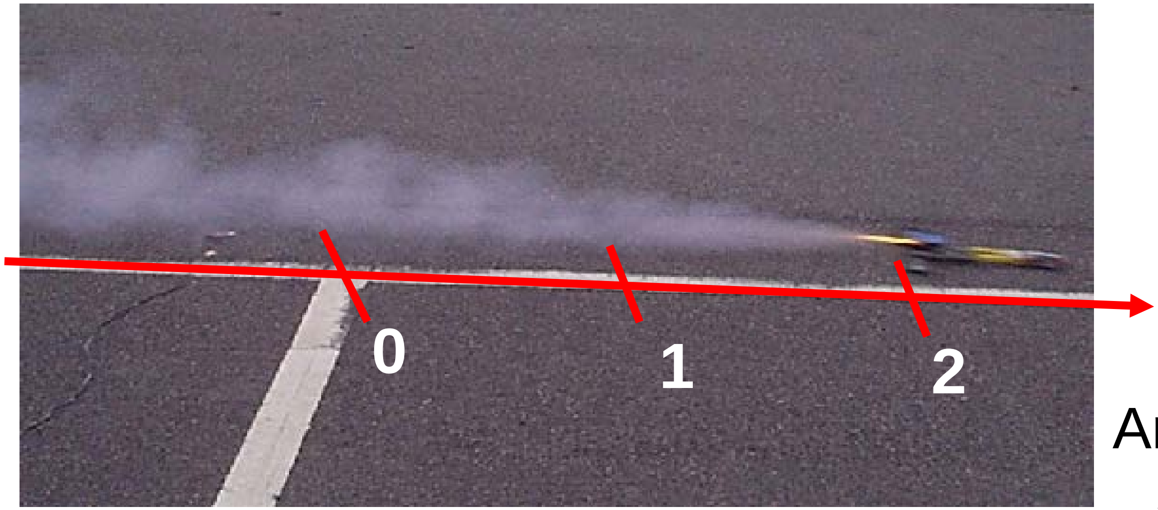
$f_4(1) = \min\{-80 + 100 + 6 + f_5(1), \quad 8 + f_5(2)\} = \min\{-54, \quad -52\} = -54$ d.h. verkaufen

$f_4(2) = \min\{-60 + 100 + 6 + f_5(1), \quad 12 + f_5(3)\} = \min\{-34, \quad -38\} = -38$ d.h. behalten

$f_4(3) = -50 + 100 + 6 + f_5(1) = -24$ d.h. verkaufen

prop Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimalsteuerung eines Raketenwagens:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\mathrm{kg}$)

Anfangszustand:

$x_1(0) = 2\,\mathrm{m},\;\; x_2(0) = 1\,\mathrm{m/s}$

Der Wagen hat einen Antrieb für beide Richtungen.

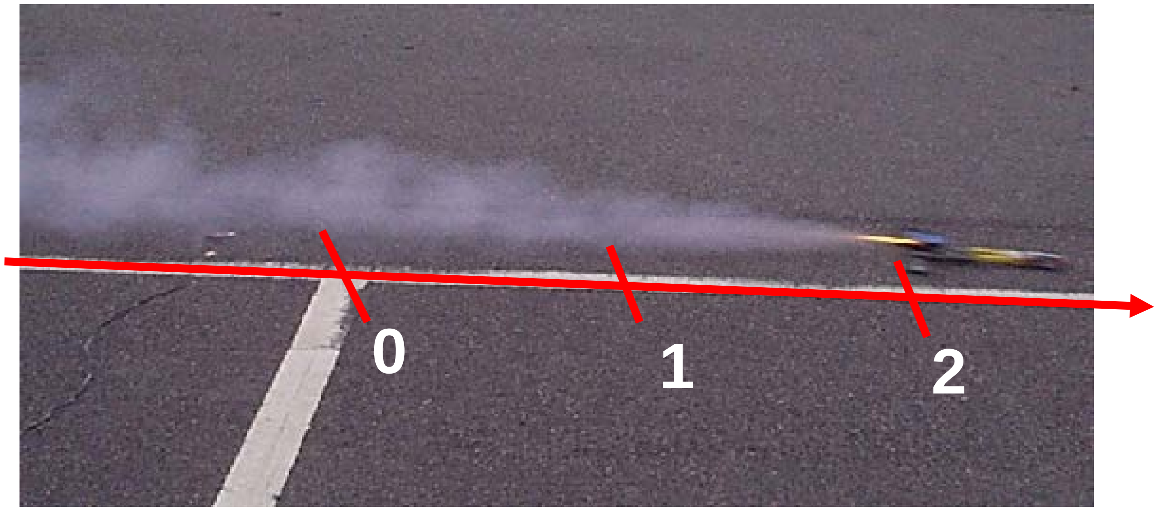
Ziel: Positionierung des Wagens an der Position „0“, wo er zum Stillstand gebracht wird.

Gewünschter Endzustand: Position $x_1^S = 0$, Geschwindigkeit $x_2^S = 0$.

Welche ist die optimale Strategie, damit der Wagen zum gewünschten Endzustand fährt und zugleich die benötigte Kraft minimiert wird?

Fachgebiet Prozessoptimierung

Zustandsraumdarstellung:



$x_1(t)$: Position
$x_2(t)$: Geschwindigkeit
$u(t)$: Antriebskraft
m : Masse ($m = 1\,\mathrm{kg}$)

Modellgleichungen:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$u(t) = m\,a(t) = m\,\dot{x}_2(t)$$

Dann

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

also

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Ziel der Optimalsteuerung:

- Minimierung der Abweichungen: $x_1^S - x_1(t);\quad x_2^S - x_2(t)$
- Minimierung der Antriebskraft: $u(t)$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Problemformulierung:

Gütefunktional: $$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ \left[x_1^S - x_1(t)\right]^2 + 2\left[x_2^S - x_2(t)\right]^2 + \left[u(t)\right]^2 \right\} dt$$

Zustandsgleichungen: $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Anfangszustand: $$x_1(0) = 2; \quad x_2(0) = 1$$

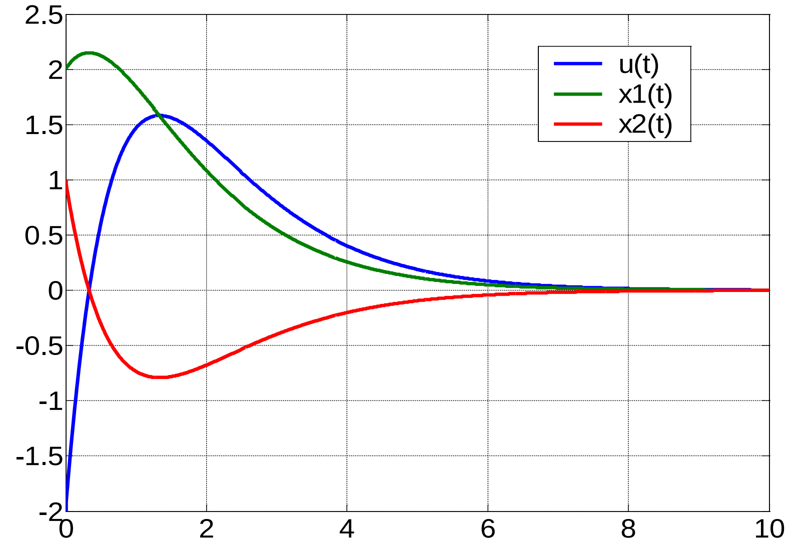
Gewünschter Endzustand: $x_1^S = 0; \quad x_2^S = 0$

Lösung mit einem mathematischen Ansatz:

$$x_1(t) = ?$$

$$x_2(t) = ?$$

$$u(t) = ?$$

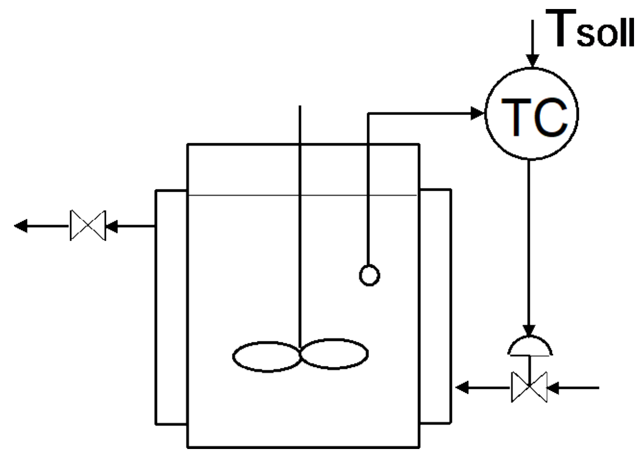


Optimierung des Betriebs von Batchreaktoren

Optimierung des Betriebs eines Batchreaktors:

Betrieb eines Batchreaktors

- Einsatzstoff zuführen
- Katalysator zudosieren
- Temperatur erhöhen
- Reaktion findet statt
- Reaktor abfahren



Die chemische Reaktion: $A \xrightarrow{2.\,Ordnung} B \xrightarrow{1.\,Ordnung} C$

Anfangszustand ist bekannt: $C_A(0) = 1\,\mathrm{mol/l},\, C_B(0) = 0,\, C_C(0) = 0$

Ziel des Betriebs: nach der gegebenen Reaktionszeit (Chargenzeit) die Zusammensetzung der Komponente $\boldsymbol{B}$ im Reaktionsgemisch zu maximieren.

Erlaubter Temperaturbereich: $298K \le T \le 398K$

Welche ist die optimale Temperaturstrategie während der Chargenzeit?

Problemformulierung:

Ziel der Optimierung: $$\max_{T(t)} \; C_B(t_f)$$

Modellgleichungen:

$$\frac{dC_A}{dt} = -k_1(T)C_A^2$$

$$\frac{dC_B}{dt} = k_1(T)C_A^2 - k_2(T)C_B$$

$$\frac{dC_C}{dt} = k_2(T)C_B$$

$$k_1(T) = k_{10}\exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right)$$

$$k_2(T) = k_{20}\exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right)$$

Prozessbeschränkung: $$298K \le T \le 398K$$

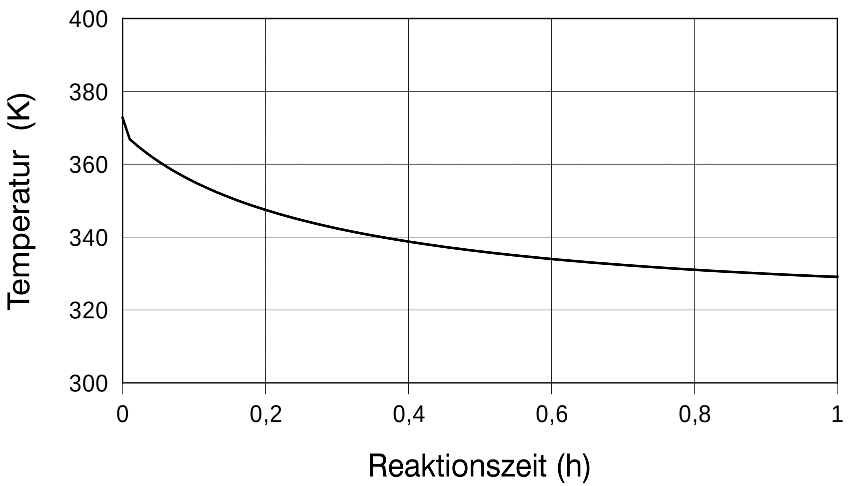
Anfangsbedingung: $$C_A(0) = 1\,\mathrm{mol/l},\; C_B(0) = 0,\; C_C(0) = 0$$

Zeitbereich: $$0 \le t \le t_f$$

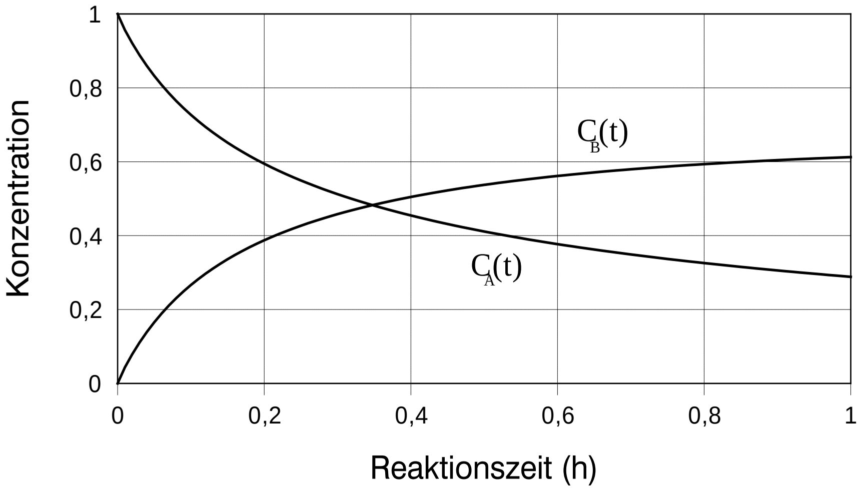
Das ist ein nichtlineares, dynamisches Optimierungsproblem!

Lösung des Optimalsteuerungsproblems:

Optimale Temperaturstrategie



Trajektorie der Konzentrationen



Implementierung des Ergebnisses durch das Prozessleitsystem.

Das Modell bzw. die Modellparameter müssen verifiziert werden!

Fachgebiet Prozessoptimierung

Zur Berechnung und Realisierung optimaler Steuerungen werden benötigt:

Prozesstechnik

- Formulierung der Zielfunktion
- Modellierung (Black-Box-, White-Box-, Gray-Box-Modell)
- Prozessbeschränkungen

Optimierungstechnik

- Mathematische Lösungsverfahren
- Konvergenzverhalten
- Rechenaufwand

Informatik

- Softwareentwicklung
- Sprache/Struktur der numerischen Rechnung
- Echtzeitimplementierung durch das Prozessleitsystem

Prozesstechnik: Problemformulierung

Ziel der Optimierung

$$\min_{u} \; f(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

Modell-gleichungen

$$\mathbf{g}(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Prozess-beschränkungen

$$\mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{x},\mathbf{u}) \le \mathbf{0}$$

Anfangs-bedingung

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimierungstechnik: Lösungsverfahren

- **Lösungsverfahren**
  - Indirekte Methoden
    - Dynamische Programmierung
    - Maximum Prinzip
  - Direkte Methoden
    - Simultane Methoden
      - Diskretisierung
      - Gradienten
      - SQP
    - Sequentielle Methoden
      - Diskretisierung
      - Simulation
      - Gradienten
      - SQP

$$\min_{u(t)} \; J\left[u(t),t_f\right] = \Phi\left[x(t_f),t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)\,dt$$

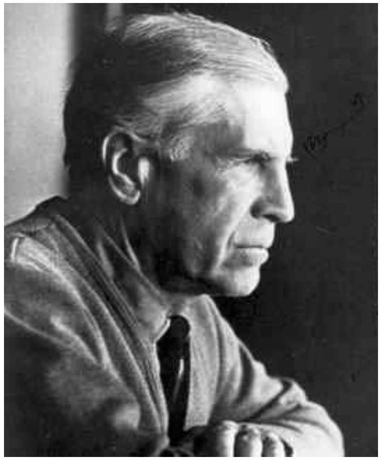
$$\begin{aligned} \text{mit} \quad & g(\dot{x},x,u,t) = 0 \\ & h(\dot{x},x,u,t) \le 0 \\ & x_{\min} \le x \le x_{\max} \\ & u_{\min} \le u \le u_{\max} \\ & x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Optimierungstechnik: Lösungsverfahren

Indirekte Verfahren (konventionell)

- Variationsverfahren (vor 1950)
- Dynamische Programmierung (Bellman, 1953)
- Das Maximum-Prinzip (Pontryagin, 1958)

Analytische Verfahren.



Lev Pontryagin

Direkte Verfahren (ab 1980)

- Diskretisierung dynamischer Systeme
- Lösung mit nichtlinearen Programmierungsverfahren
- Effiziente Berechnung der Gradienten
    - Simultane Verfahren
    - Sequentielle Verfahren

Numerische Verfahren.

Fachgebiet Prozessoptimierung

Informatik: Implementierung

Inhalt dieser Lehrveranstaltung:

Indirekte Verfahren

- Variationsverfahren, Optimalitätsbedingungen
- Das Maximum-Prinzip
- Dynamische Programmierung
- Riccati-Optimal-Regler

Direkte Verfahren

- Methoden zur Diskretisierung, Orthogonale Kollokation
- Lösung mit nichtlinearen Programmierungsverfahren
- Simultane und Sequentielle Verfahren

Anwendungen

- Prozesse in der Luft- und Raumfahrtindustrie
- Prozesse in der Chemieindustrie
- Prozesse in der Wasserbewirtschaftung

Software (Übungen im PC-Pool)

- GAMS
- MATLAB

Literatur:

J. Lunze: **Regelungstechnik 2***.* Springer. 1997

R. Unbehauen: **Regelungstechnik 2***.* Vieweg. 1993

O. Föllinger: **Regelungstechnik***.* Hüthig. 1992

D.G. Luenberger: **Introduction to Dynamic Systems**. Wiley. 1979

A.C. Chiang: **Elements of Dynamic Optimization**. McGraw-Hill. 1992

P. Kosmol: **Optimierung und Approximation**. de Gruyter. 1991

D.P. Bertsekas: **Dynamic Programming and Stochastic Control**. Academic Press. 1976

M. Papageorgiou: **Optimierung**. Oldenbourg. 1996