Dynamische Prozessoptimierung

Kapitel 3:

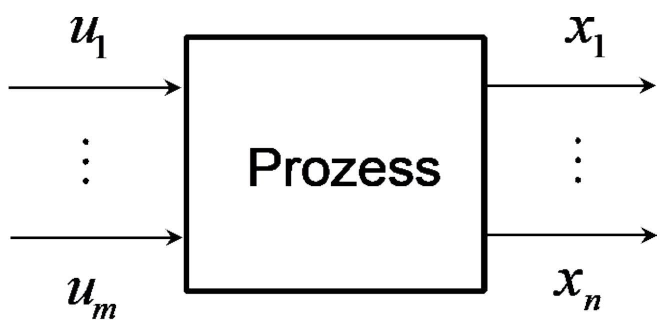
Verfahren der Variation

Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Fachgebiet
Prozessoptimierung

Darstellung dynamischer Prozesse:



Steuervariable: $\mathbf{u} = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_m(t)]^T$ (i. Allg. $m \neq n$)

Zustandsvariable: $\mathbf{x} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T$

Beschränkungen: $u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, \quad i = 1, \cdots, m$

$x_{j,\min} \leq x_i(t) \leq x_{j,\max}, \quad j = 1, \cdots, n$

Zeitbereich: $t_0 \leq t \leq t_f$ (vorgegeben oder frei)

Anfangszustand: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (bekannt)

Endzustand: $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ (vorgegeben oder frei)

Modellgleichungen: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ (linear oder nichtlinear)

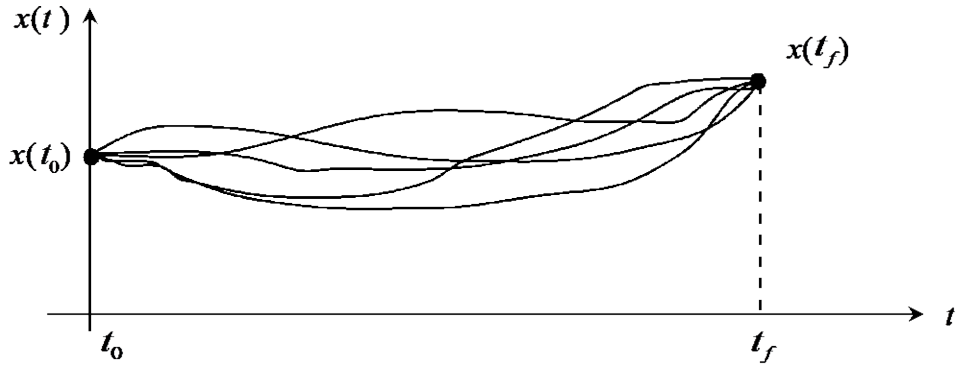
prop Fachgebiet Prozessoptimierung

Grafische Darstellung einer Zustandsvariable:

t_0, t_f vorgegeben

$x(t_0), x(t_f)$ vorgegeben

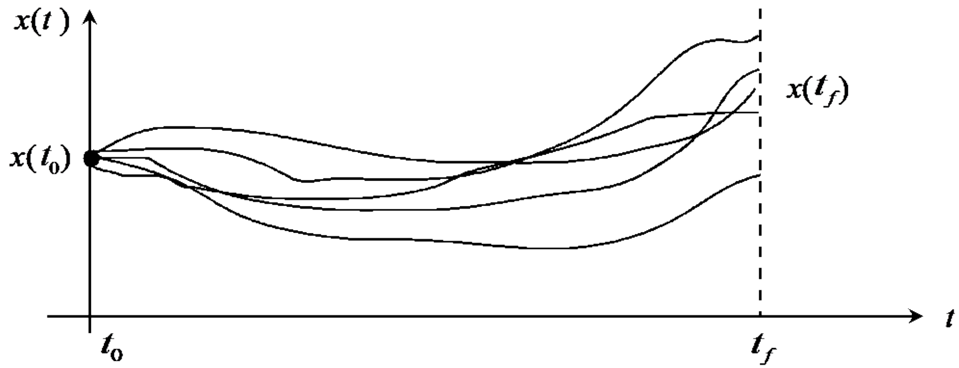
$x(t)$ unbeschränkt



t_0, t_f vorgegeben

$x(t_f)$ frei

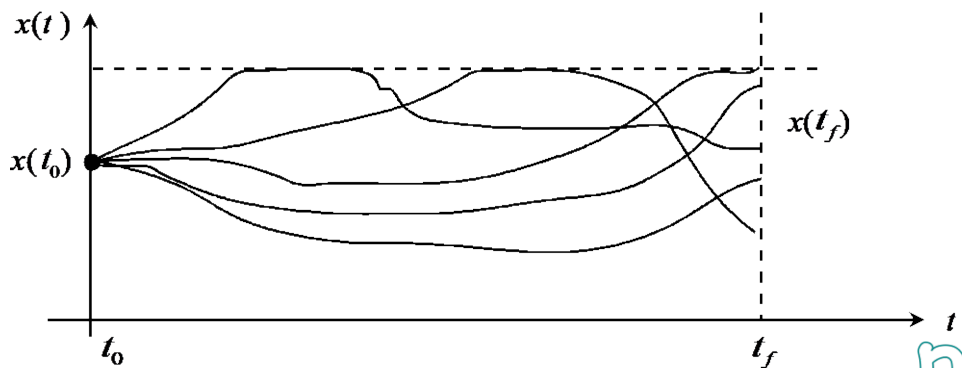
$x(t)$ unbeschränkt



t_0, t_f vorgegeben

$x(t_f)$ frei

$x(t)$ beschränkt

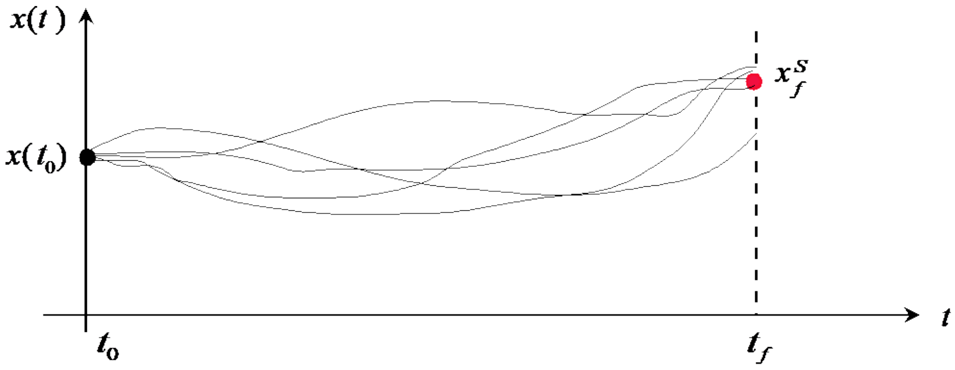


Fachgebiet Prozessoptimierung

Ziel einer optimalen Steuerung:

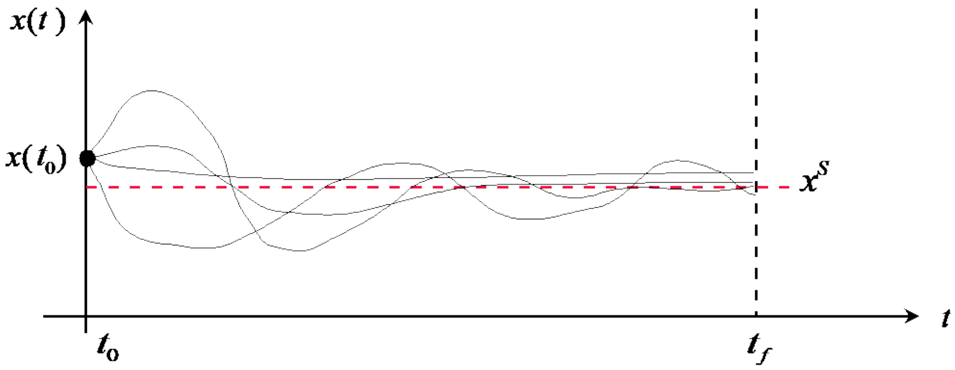
Landung:

$$J = \min_{u(t)} [x(t_f) - x_f^S]^2$$



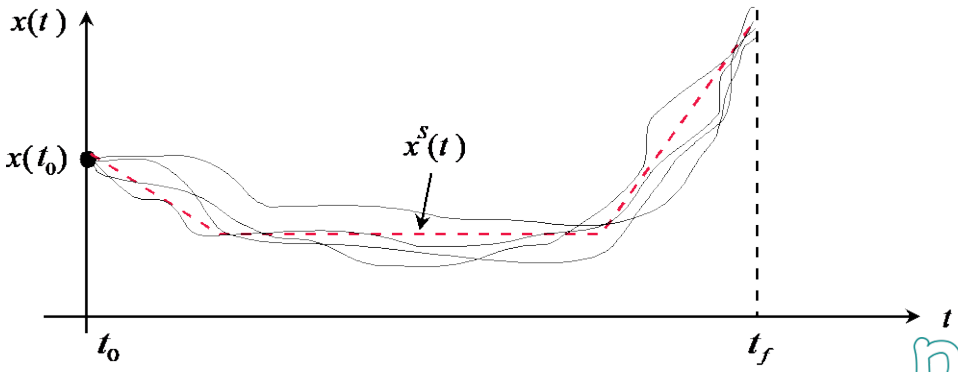
Halten:

$$J = \min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^S]^2 dt$$



Folgen:

$$J = \min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^S(t)]^2 dt$$



Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimalsteuerungsproblem:

Zielfunktional: $$J = \min_{u(t)} \left(\phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \right)$$

Modellgleichungen: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ (Anzahl der Gleichungen = n)

Anfangszustand: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (bekannt)

Endzustand: $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ (vorgegeben oder frei)

Zeitbereich: $t_0 \le t \le t_f$ (vorgegeben oder frei)

Beschränkungen: $u_{i,\min} \le u_i(t) \le u_{i,\max}, \quad i = 1,\cdots,m$ (vorgegeben oder frei)

$x_{j,\min} \le x_i(t) \le x_{j,\max}, \quad j = 1,\cdots,n$ (vorgegeben oder frei)

Eine optimale Steuerung $\mathbf{u}^*(t)$ wird durch die Lösung des Problems herausgefunden, um das Zielfunktional zu minimieren!

Zugleich müssen die Nebenbedingungen eingehalten werden!

Ein mathematischer Lösungsansatz wird hierfür benötigt.
Ein Lösungsansatz wird basierend auf Optimalitätsbedingungen abgeleitet.

Optimalitätsbedingung:

Zielfunktional:

$$J = \min_{\mathbf{u}(t)} \left(\phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \right)$$

Die optimalen Steuerungsfunktionen $\mathbf{u}^*(t)$ werden gesucht, um J zu minimieren.

D.h. Minimierung einer Funktion von Funktionen.

Die optimale Lösung beim Minimum von J: $\mathbf{u}^*(t)$

$$J\left[\mathbf{u}(t)\right] - J\left[\mathbf{u}^*(t)\right] \geq 0$$

Einführung einer kleinen Änderung an der optimalen Lösung:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t)$$

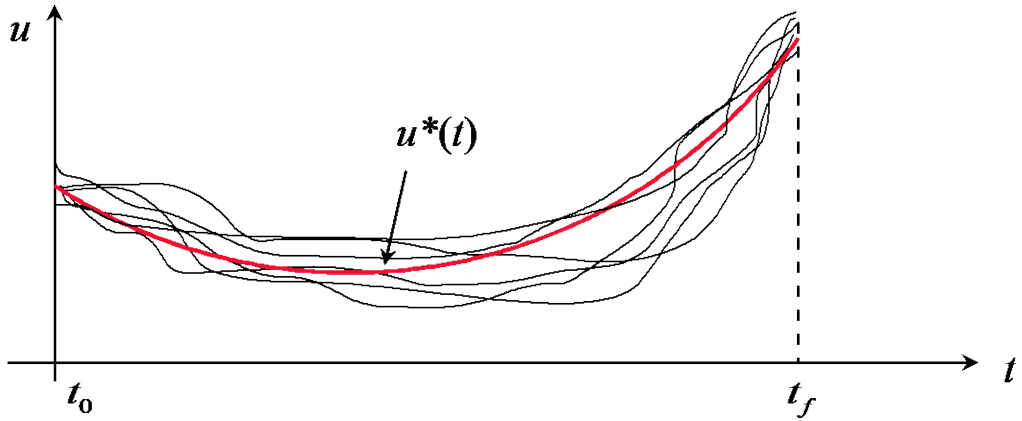
Die Änderung des Funktionales:

$$\Delta J = J[\mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t)] - J[\mathbf{u}^*(t)]$$

Variation eines Funktionals:

Die Änderung eines Funktionals:

$$\Delta J[\mathbf{u}(t)] = J[\mathbf{u}(t) + \delta\mathbf{u}(t)] - J[\mathbf{u}(t)]$$



Die Variation des Funktionals:

$$\delta J[\mathbf{u}(t)] = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J[\mathbf{u}(t) + \varepsilon\, \delta\mathbf{u}(t)] - J[\mathbf{u}(t)]}{\varepsilon}$$

Beim Minimum von *J*: $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$

Die notwendige Optimalitätsbedingung: $\delta J[\mathbf{u}^*(t)] = 0$

Das Euler-Lagrange-Verfahren

Lagrange-Problem: $$J = \min_{\mathbf{y}} \int_{t_0}^{t_f} f_0(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t)dt$$

Mayer-Problem: $$J = \min_{\mathbf{y}} \ \phi(\mathbf{y}(t_f))$$

Bolza-Problem: $$J = \min_{\mathbf{y}} \left(\phi(\mathbf{y}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t)dt \right)$$

Nun wird das Lagrange-Problem betrachtet:

$$J = \min_{\mathbf{y}} \int_{t_0}^{t_f} f_0(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t)dt$$

Mit vorgegebenen Randbedingungen: $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t_f) = \mathbf{y}_f$

Die optimale Lösung: $\mathbf{y}^*(t)$

Einführung einer kleinen Änderung an der optimalen Lösung:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \varepsilon\, \boldsymbol{\eta}(t), \qquad \boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(t_f) = \mathbf{0}$$

Das Euler-Lagrange-Verfahren

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \varepsilon\,\boldsymbol{\eta}(t), \qquad \dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{y}}^*(t) + \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$$

Daher

$$J = \min_{\mathbf{y}} \int_{t_0}^{t_f} f_0(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t)\,dt = \min_{\mathbf{y}} \int_{t_0}^{t_f} f_0(\dot{\mathbf{y}}^* + \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{y}^* + \varepsilon\,\boldsymbol{\eta}, t)\,dt$$

Die Optimalitätsbedingung: $\delta J[\mathbf{y}^*(t)] = \left.\dfrac{\partial J^*}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

D.h.

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_0(\dot{\mathbf{y}}^* + \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{y}^* + \varepsilon\,\boldsymbol{\eta}, t)\right|_{\varepsilon=0} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}^T}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{y}^T}\boldsymbol{\eta} \right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}^T} d\boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{y}^T}\boldsymbol{\eta}\,dt$$

$$= \left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}^T}\boldsymbol{\eta}\right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}^T}\right)\boldsymbol{\eta}\,dt + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{y}^T}\boldsymbol{\eta}\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{y}^T} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}^T}\right) \right] \boldsymbol{\eta}\,dt = 0$$

Das Euler-Lagrange-Verfahren

D.h.
$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{y}^T}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}^T}\right)\right]\boldsymbol{\eta}\,dt=0$$

Weil $\boldsymbol{\eta}(t)\neq\mathbf{0}$ und beliebig sind, muss

$$\boxed{\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{y}}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right)=\mathbf{0}}$$

Euler-Lagrange-Gleichung:
Sie besteht aus der 1. und 2. Ableitungen. Sowohl Anfangs- als auch Endbedingung werden zur Lösung benötigt.

Beispiel:

$$J=\min_y \int_0^{\pi/2}(\dot{y}^2-y^2)dt,\quad y(0)=0,\ y(\pi/2)=1$$

Weil $f_0(\dot{\mathbf{y}},\mathbf{y},t)=\dot{y}^2-y^2,\quad \frac{\partial f_0}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}=2\dot{y},\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}\right)=2\ddot{y}$

Nach Euler-Lagrange-Gleichung: $\ddot{y}+y=0$

Die Lösung: $y^*(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$

Anhand der Randbedingungen: $y^*(t)=\sin t$

Das Euler-Lagrange-Verfahren

Erweitern des Lagrange-Problems: $$J = \min_{\mathbf{y}} \int_{t_0}^{t_f} f_0(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t)\,dt$$

Mit vorgegebenen Randbedingungen: $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t_f) = \mathbf{y}_f$

Zusätzlich müssen folgende Gleichungen erfüllt werden (implizite Gleichungsnebenbedingungen):

$$\mathbf{g}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$$

Die Lagrange-Funktion: $$L = f_0(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t)$$

Dann wird zu einem Problem ohne Beschränkungen umgeformt:

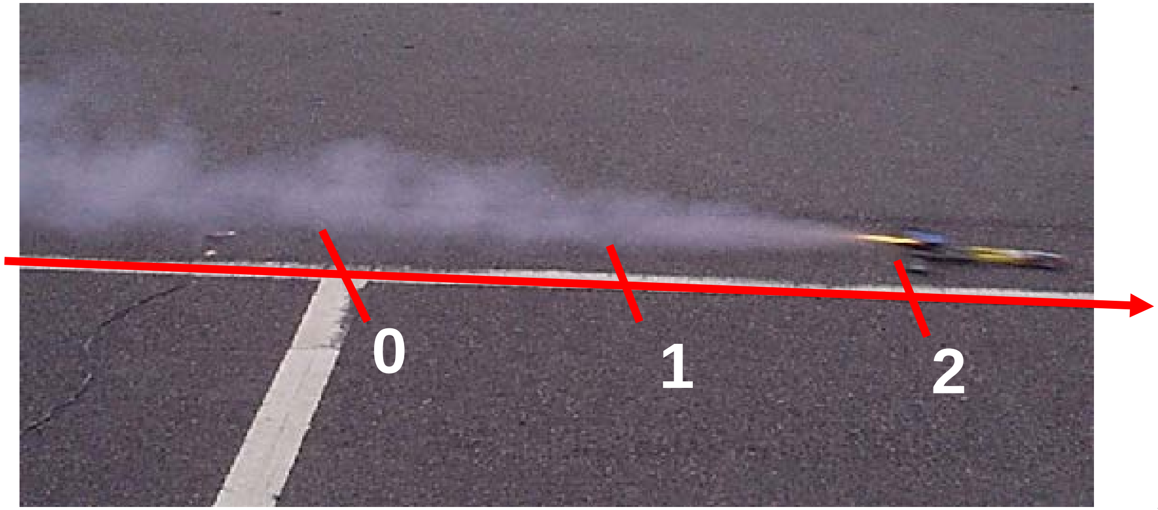
$$\tilde{J} = \min_{\mathbf{y}} \int_{t_0}^{t_f} \left[f_0(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t) \right] dt$$

Die Lösung folgt nach der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) = \mathbf{0}}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimalsteuerung eines Raketenwagens:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\mathrm{kg}$)

Anfangszustand:

$$x_1(0) = 2\,\mathrm{m},\ \ x_2(0) = 1\,\mathrm{m/s}$$

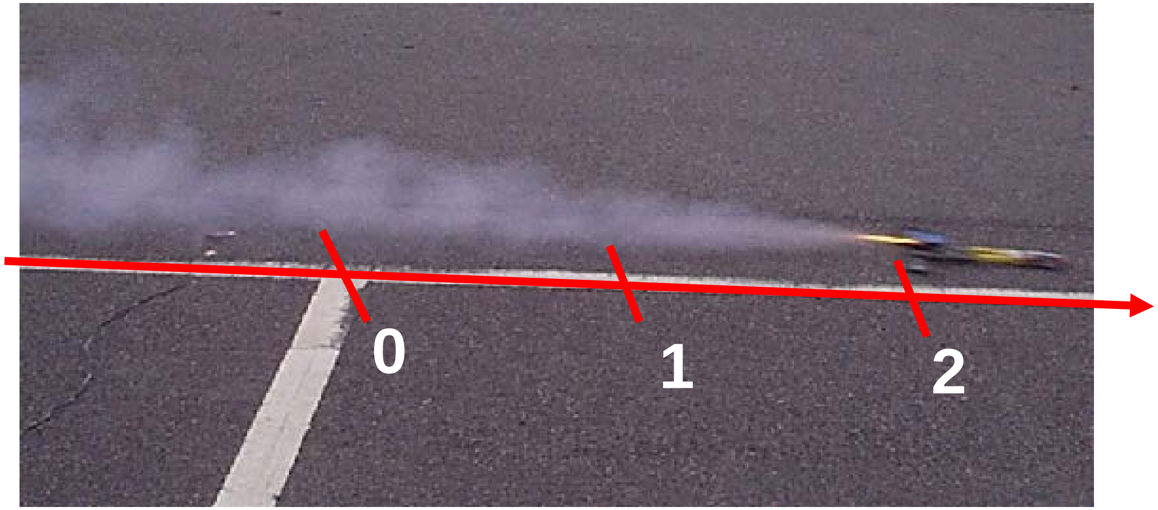
Der Wagen hat einen Antrieb für beide Richtungen.

Ziel: Positionierung des Wagens an der Position „0", wo er zum Stillstand gebracht wird.

Endzustand: Position $x_1(2) = 0$, Geschwindigkeit $x_2(2) = 0$.

Welche ist die optimale Strategie, damit der Wagen bei *t* = 2s zum Endzustand fährt und zugleich die benötigte Kraft minimiert wird?

Zustandsraumdarstellung:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\mathrm{kg}$)

Modellgleichungen:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 2\,\mathrm{m} \qquad x_1(2) = 0\,\mathrm{m}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \qquad x_2(0) = 1\,\mathrm{m/s} \qquad x_2(2) = 0\,\mathrm{m/s}$$

Ziel der Optimalsteuerung:

$$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^2 [u(t)]^2\, dt$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Lösung mit dem Euler-Lagrange-Verfahren

Das Zielfunktional: $$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^2 [u(t)]^2\, dt$$

Modellgleichungen: $$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$$

Lagrange-Funktion: $$L = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1[\dot{x}_1(t) - x_2(t)] + \lambda_2[\dot{x}_2(t) - u(t)]$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right) = \mathbf{0}}$$

mit

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial u} \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \lambda_2 \\ 0 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix}$$

Lösung mit dem Euler-Lagrange-Verfahren

Dann $\begin{pmatrix} u-\lambda_2 \\ 0 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned}$

Es besteht aus 5 Gleichungen und 5 Unbekannten. Dieses einfache Differentialgleichungssystem kann analytisch gelöst werden.

Also

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 = -c_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

$$u = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad u = -c_1 t + c_2$$

$$\dot{x}_2 = u = -c_1 t + c_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2} c_1 t^2 + c_2 t + c_3$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = -\frac{1}{2} c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{6} c_1 t^3 + \frac{1}{2} c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

Lösung mit dem Euler-Lagrange-Verfahren

Anhand der Randbedingungen:

$$x_1(0) = c_4 = 2 \qquad x_1(2) = -\frac{4}{3}c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 = 0$$

$$x_2(0) = c_3 = 1 \qquad x_2(2) = -2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

Es folgt $c_1 = -\dfrac{9}{2}, \quad c_2 = -5, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 2$

Also

$$x_1^*(t) = \frac{3}{4}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + t + 2$$

$$x_2^*(t) = \frac{9}{4}t^2 - 5t + 1$$

$$u^*(t) = \frac{9}{2}t - 5$$

(Übungsaufgabe!)

Dynamische Optimierungsprobleme
mit expliziten Gleichungsnebenbedingungen und
ohne Spezifikation des Endzustandes

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Die Hamilton-Funktion:

$$H = f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

$\boldsymbol{\lambda}(t)$: adjungierter Zustandsvektor (Kozustandsv.) mit n Elementen

Umformung zu einem unbeschränkten Problem:

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) - \dot{\mathbf{x}}] \right\} dt$$

D.h.

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt$$

Das Hamilton-Verfahren

Das Zielfunktional:

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) dt$$

Da

$$\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}^T d\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}\, dt$$

daher

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] - \boldsymbol{\lambda}(t_f)^T \mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)^T \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (H + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt$$

Die optimale Lösung zur Minimierung von J:

$$\mathbf{u}^*(t), \quad \mathbf{x}^*(t)$$

Einführung kleiner Änderung an der optimalen Lösung:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t)$$

Das Hamilton-Verfahren

Weil $$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] - \boldsymbol{\lambda}(t_f)^T \mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0)^T \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (H + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt$$

Die Variation des Funktionals:

$$\delta J = \delta\phi[\mathbf{x}(t_f)] - \delta[\boldsymbol{\lambda}(t_f)^T \mathbf{x}(t_f)] + \delta[\boldsymbol{\lambda}(t_0)^T \mathbf{x}(t_0)] + \int_{t_0}^{t_f} \delta(H + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt$$

mit

- $\delta\phi[\mathbf{x}(t_f)] = \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T(t_f)} \delta\mathbf{x}(t_f)$
- $\delta[\boldsymbol{\lambda}(t_f)^T \mathbf{x}(t_f)] = \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \delta\mathbf{x}(t_f)$
- $\delta[\boldsymbol{\lambda}(t_0)^T \mathbf{x}(t_0)] = 0$
- $\delta H = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T} \delta\mathbf{x} + \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}^T} \delta\mathbf{u}$
- $\delta[\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}] = \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \delta\mathbf{x}$

Das Hamilton-Verfahren

Daher

$$\delta J = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T(t_f)} - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \right] \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}^T} \delta \mathbf{u} \right] dt$$

Da $\delta \mathbf{x}(t_f) \neq \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$

Um $\delta J = 0$ **zu erzielen, müssen**

- $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} - \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}$ **bzw.** $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$
- $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$ **bzw.** $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$
- $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$

Die Optimalitätsbedingungen:

Das Problem:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Die Lösung muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

Zustandsgleichungen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

Kozustandsgleichungen:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}$$

Randbedingungen:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$$

Extrembedingung:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Eine Eigenschaft der Hamilton-Funktion:

Die Hamilton-Funktion: $H = f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}^T}\dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Da bei der Lösung: $\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}}$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + 0 + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Also $$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Wenn $H = f_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ **dann** $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

D.h. bei der optimalen Lösung ist $H(t) = const., \quad t_0 \le t \le t_f$

Das Hamilton-Verfahren (Erweiterung 1)

Dynamische Optimierungsprobleme mit einer Spezifikation des Endzustandes

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f),t_f) = \mathbf{0}$$

Die Hamilton-Funktion: $H = f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$

Umformung zu einem unbeschränkten Problem:

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) - \dot{\mathbf{x}}] \right\} dt$$

D.h. $$J = \tilde{\phi}[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}})dt$$

mit $$\tilde{\phi}[\mathbf{x}(t_f)] = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f),t_f)$$

Das Hamilton-Verfahren (Erweiterung 1)

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f),t_f) = \mathbf{0}$$

Die Lösung muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

Zustandsgleichungen: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$

Kozustandsgleichungen: $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\dfrac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \dfrac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}$

Randbedingungen: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

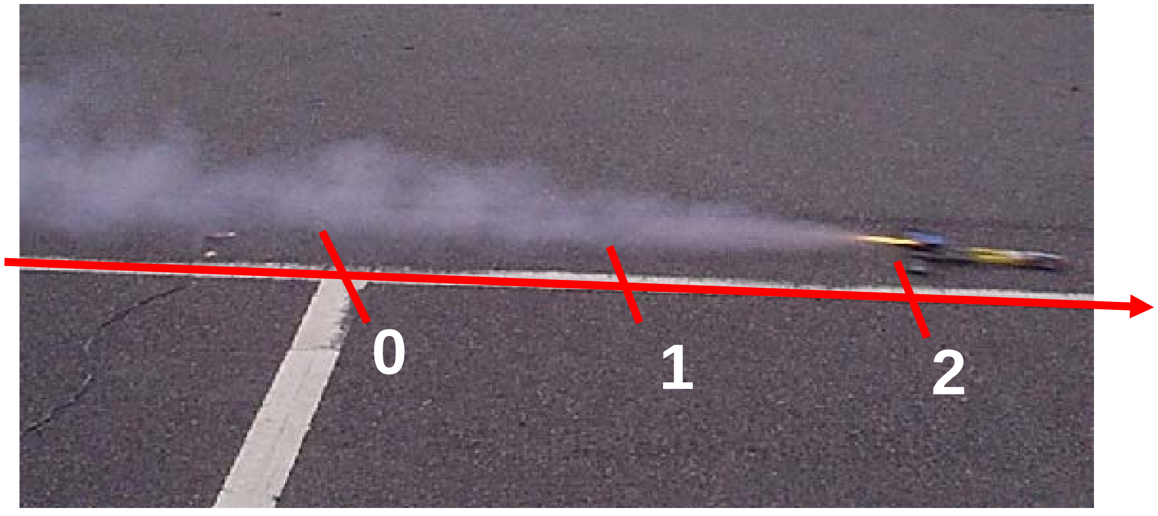
$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu}$$

(Erweiterung!)

Extrembedingung: $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimalsteuerung des Raketenwagens:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m: Masse ($m = 1\,\text{kg}$)

Das optimale Steuerungsproblem:

$$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^2 [u(t)]^2\, dt$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \qquad x_2(0) = 1$$

$$x_1(2) + x_2(2) = 1$$

(Übungsaufgabe!)

Das Hamilton-Verfahren (Erweiterung 2)

Dynamische Optimierungsprobleme mit freier Endzeit, d.h. t_f ist eine Variable.

$$\min_{\mathbf{u}(t),t_f} \quad J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Die Lösung muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

Zustands-/Kozustandsgleichungen: $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$

Randbedingungen: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$

Extrembedingung: $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$

Endbedingung der **Hamilton-Funktion:**

$$H[\mathbf{x}^*(t_f^*),\mathbf{u}^*(t_f^*),\boldsymbol{\lambda}^*(t_f^*),t_f^*] = -\frac{\partial \phi[\mathbf{x}^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f}$$

(Erweiterung!)

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel:

$$J = \min_{u(t),t_f} \left[t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2(t)dt \right]$$

$$\text{mit} \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \;\; x(t_f) = 0$$

Hamilton-Funktion: $$H = f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$$

Zustandsgln.: $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = f(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = u$

Kozustandsgln.: $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = 0$

Randbedingungen: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = 1$

$x(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_f) = 0$

Extrembedingung: $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad u + \lambda = 0$

Endbedingung: $H[\mathbf{u}^*(t_f^*), \boldsymbol{\lambda}^*(t_f^*)] = -\frac{\partial \phi(t_f^*)}{\partial t_f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda(t_f)u(t_f) = -1$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Die analytische Lösung:

$$\dot{\lambda} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = c_1$$

$$u + \lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad u = -\lambda = -c_1$$

$$\frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda(t_f)u(t_f) = -1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}c_1^2 - c_1^2 = -1$$

$$\dot{x} = u \quad\Rightarrow\quad x = -c_1 t + c_2$$

$$x(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad c_2 = 1$$

$$x(t_f) = 0 \quad\Rightarrow\quad -c_1 t_f + 1 = 0$$

Die Lösung:

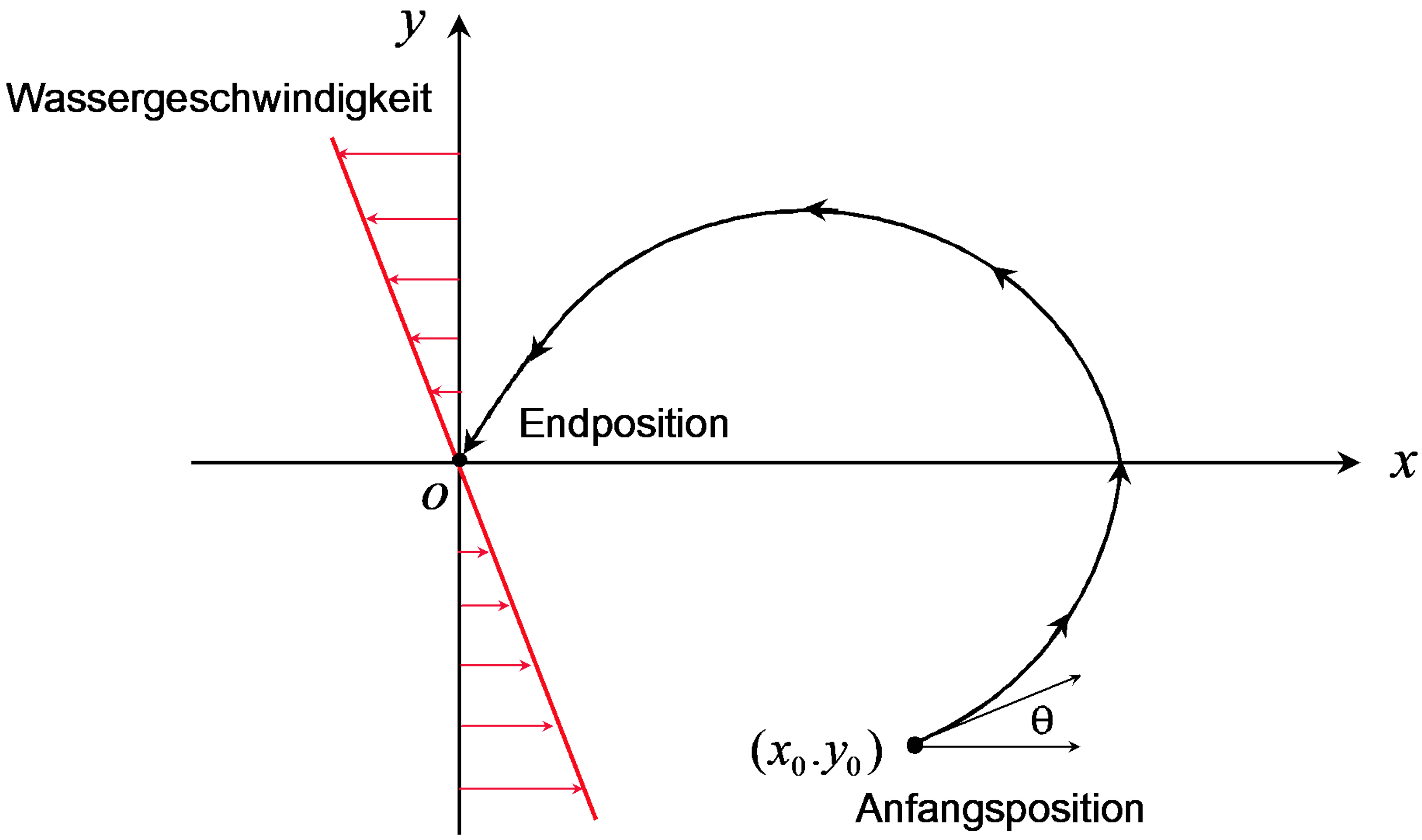
$$x^*(t) = 1 - \sqrt{2}\, t$$

$$u^*(t) = -\sqrt{2}$$

$$t_f^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

prop Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Zeitoptimale Umsteuerung eines Schiffes



Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Zeitoptimale Umsteuerung eines Schiffes

Zielfunktion: $$J = \min_{u(t),t_f} \int_0^{t_f} dt = \min_{u(t),t_f} t_f$$

Maximale Geschwindigkeit (relativ zum Wasser): V (bekannt)

Wassergeschwindigkeit: $w = -k\,y$ (k bekannt)

Fahrtgleichungen:
$$\dot{x} = V\cos\theta + w = V\cos\theta - k\,y$$
$$\dot{y} = V\sin\theta$$

Anfangsposition: $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$ (bekannt)

Endposition: $x(t_f) = 0, \quad y(t_f) = 0$ (vorgegeben)

Steuervariable: $\theta(t), \quad t_f$

Zustandsvariable: $x(t), \quad y(t)$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Zeitoptimale Umsteuerung eines Schiffes

Hamilton-Funktion: $$H = 1 + \lambda_1 (V \cos\theta - k\, y) + \lambda_2 (V \sin\theta)$$

Die Lösung muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

Zustandsgleichungen:

$$\dot{x} = V \cos\theta - k\, y \quad (1)$$

$$\dot{y} = V \sin\theta \quad (2)$$

Kozustandsgleichungen:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda_1\, k \quad (4)$$

Extrembedingung:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = V(-\lambda_1 \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta) = 0 \quad (5)$$

Eigenschaft der Hamilton:

$$H(t) = H(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} = 0$$

Also

$$1 + \lambda_1 (V \cos\theta - k\, y) + \lambda_2 (V \sin\theta) = 0 \quad (6)$$

Beispiel: Zeitoptimale Umsteuerung eines Schiffes

Es gibt 6 Gleichungen und 6 Variablen:

$$x(t), \quad y(t), \quad \lambda_1(t), \quad \lambda_2(t), \quad \theta(t), \quad t_f$$

Anfangsposition: $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$ (bekannt)

Endposition: $x(t_f) = 0, \quad y(t_f) = 0$ (vorgegeben)

Normalerweise wird ein numerisches Verfahren benötigt. Dieses Problem kann jedoch durch Integration und Elimination analytisch gelöst werden.

Aus (5) und (6):

$$\lambda_1 = -\frac{\cos\theta}{V - k\, y \cos\theta} \qquad (7)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sin\theta}{V - k\, y \cos\theta} \qquad (8)$$

Setzt man (7), (8) in (3), (4) ein: $\dot{\theta} = -k \cos^2\theta$

Beispiel: Zeitoptimale Umsteuerung eines Schiffes

D.h. $$\frac{d\theta}{dt} = -k\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad k\int_t^{t_f} dt = -\int_\theta^{\theta_f} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad k(t_f - t) = \tan\theta - \tan\theta_f \qquad (9)$$

Nach (3) $$\lambda_1 = const.$$

Aus (7) $$\frac{\cos\theta}{V - k\,y\cos\theta} = \frac{\cos\theta_f}{V - k\,y_f\cos\theta_f} = \frac{\cos\theta_f}{V} \qquad (y_f = 0)$$

Dadurch $$y = \frac{V}{k}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f}\right) \qquad (10)$$

Nach (1) $$\dot{x} = V\cos\theta - k\,y = V\cos\theta - V\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f}\right)$$

Beispiel: Zeitoptimale Umsteuerung eines Schiffes

Also
$$\frac{dx}{dt} = V\cos\theta - V\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f}\right)$$

Weil
$$\frac{d\theta}{dt} = -k\cos^2\theta$$

dann
$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{V}{k}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta\cos\theta_f}\right)$$

Also
$$\int_x^{x_f} dx = -\frac{V}{k}\int_\theta^{\theta_f}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta\cos\theta_f}\right)d\theta$$

$$x = \frac{V}{2k}[\sec\theta_f(\tan\theta_f - \tan\theta) - \tan\theta(\sec\theta_f - \sec\theta)$$

$$+\ln\frac{\tan\theta_f + \sec\theta_f}{\tan\theta + \sec\theta}] \qquad (11)$$

Beispiel: Zeitoptimale Umsteuerung eines Schiffes

Wichtige Gleichungen:

$$k(t_f - t) = \tan\theta - \tan\theta_f \tag{9}$$

$$y = \frac{V}{k}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f}\right) \tag{10}$$

$$x = \frac{V}{2k}[\sec\theta_f(\tan\theta_f - \tan\theta) - \tan\theta(\sec\theta_f - \sec\theta) + \ln\frac{\tan\theta_f + \sec\theta_f}{\tan\theta + \sec\theta}] \tag{11}$$

Anhand der Anfangsbedingung:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0$$

Aus (10) und (11) erhält man: $\theta_0^*, \quad \theta_f^*$

Aus (9) hat man: $t_f^* = \dfrac{\tan\theta_0^* - \tan\theta_f^*}{k}, \quad \theta^*(t) = \arctan\left[\tan\theta_f^* + k(t_f^* - t)\right]$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Zusammenfassung:

- Formulierung optimaler Steuerungsprobleme
- Zielfunktional
- Optimalitätsbedingung
- Das Euler-Lagrange-Verfahren
- Das Hamilton-Verfahren
- Analytische Lösung
- Steuerung statt Regelung
- Beschränkungen noch nicht berücksichtigt