Optimale Steuerung 2

Kapitel 4:

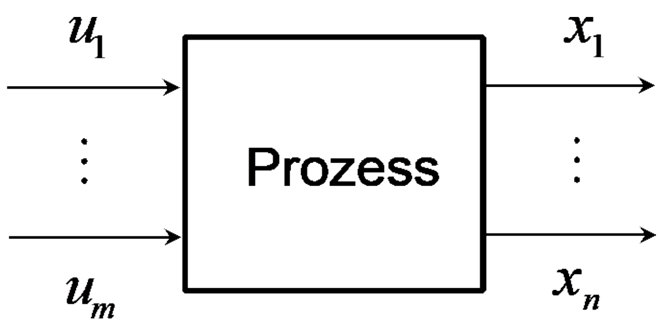
Das Maximum-Prinzip

Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Fachgebiet
Prozessoptimierung

Problemdarstellung:



Steuervariable: $\mathbf{u} = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \cdots \quad u_m(t)]^T$

Zustandsvariable: $\mathbf{x} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T$

(i.Allg. $m \neq n$)

Beschränkungen:

$$u_{i,\min} \le u_i(t) \le u_{i,\max}, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_{j,\min} \le x_i(t) \le x_{j,\max}, \quad j = 1, \cdots, n$$

Zeitbereich: $t_0 \le t \le t_f$ (vorgegeben oder frei)

Anfangszustand: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (bekannt)

Endzustand: $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ (vorgegeben oder frei)

Modellgleichungen: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ (linear oder nichtlinear)

Optimalsteuerungsproblem:

Zielfunktional: $$J = \min_{\mathbf{u}} \left(\phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})dt \right)$$

Modellgleichungen: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ (Anzahl der Gleichungen = n)

Anfangszustand: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (bekannt)

Endzustand: $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0}$ (vorgegeben oder frei)

Zeitbereich: $t_0 \le t \le t_f$ (vorgegeben oder frei)

Beschränkungen: $u_{i,\min} \le u_i(t) \le u_{i,\max}$, $i = 1,\cdots,m$ (vorgegeben oder frei)

Aufgrund der Beschränkung der Steuervariablen kann die Lösung $\mathbf{u}^*(t)$ an der Grenze sein.

In dieser Situation ist die Extrembedingung: $$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

nicht nutzbar. Eine neue Bedingung muss hierfür abgleitet werden.

Das Maximum-Prinzip

Hamilton-Funktion: $$H = f_0(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

Zustandsgleichungen: $$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = f(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

Kozustandsgleichungen: $$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}$$

Randbedingungen: $$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu}$$

Extrembedingung: $$H(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t)) = \min_{\mathbf{u}_{\min}\le\mathbf{u}\le\mathbf{u}_{\max}} H(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t))$$

t_f fixiert: $$H(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t)) = H(\mathbf{x}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\boldsymbol{\lambda}^*(t_f)) = const.$$

t_f frei: $$H(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t)) = H(\mathbf{x}^*(t_f^*),\mathbf{u}^*(t_f^*),\boldsymbol{\lambda}^*(t_f^*)) = 0$$

Fachgebiet
Prozessoptimierung

Beispiel: Maximierung der Reichweite einer Rakete

Anfangszustand: $x(0)=0, \quad y(0)=0, \quad m(0)=m_0$

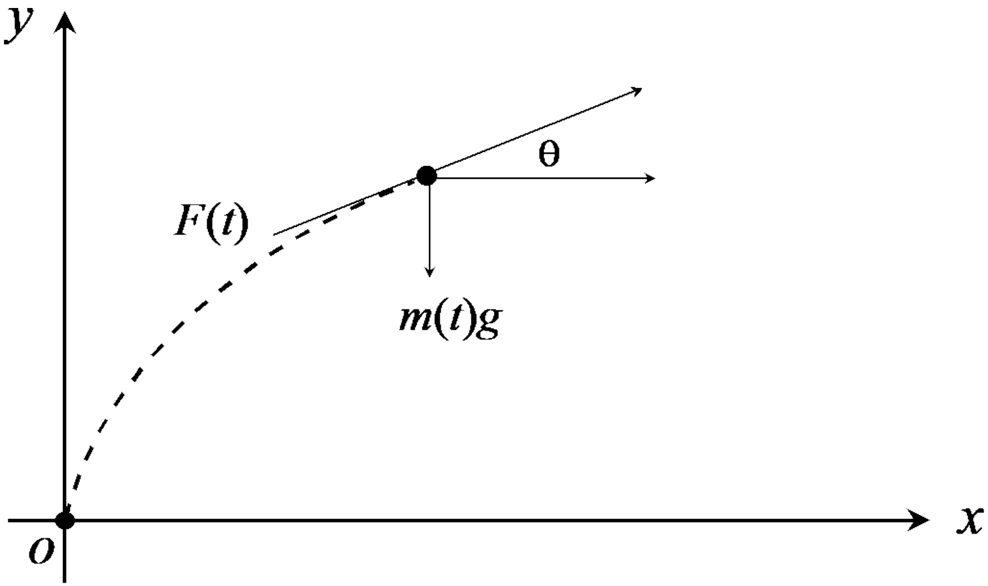
Endzustand: $x(t_f)=x_f, \quad y(t_f)=y_f, \quad m(t_f)=m_f$

$y_f, \; m_f$ sind spezifiziert, d.h. müssen die vorgegeben Werte erzielen.

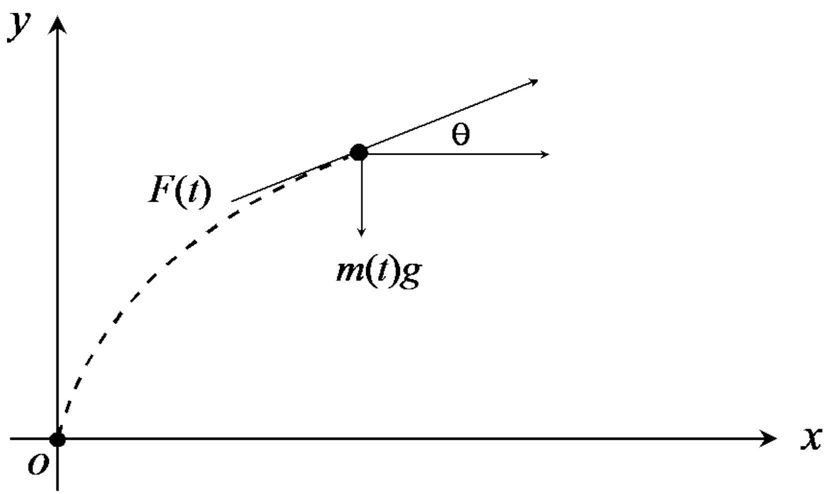
x_f ist zu maximieren.

$0 \le F(t) \le F_{\max}$ ist die Beschränkung der Antriebskraft.

$F(t), \; \theta(t)$ sind Steuervariablen.



Modellierung: (Vernachlässigung des Luftwiderstands)



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\cos\theta$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F\sin\theta - mg$$

$$\frac{dm}{dt} = -kF$$

Definition:

$$x_1 \equiv x$$

$$x_2 \equiv y$$

$$x_3 \equiv \frac{dx}{dt}$$

$$x_4 \equiv \frac{dy}{dt}$$

$$x_5 \equiv m$$

$$u_1 \equiv \cos\theta$$

$$u_2 \equiv \sin\theta$$

$$u_3 \equiv kF$$

$$c \equiv \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{cu_3u_1}{x_5}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{cu_3u_2}{x_5} - g$$

$$\dot{x}_5 = -u_3$$

Das Optimierungsproblem:

Zielfunktional:

$$J = \min_{\mathbf{u}} \left[-\int_0^{t_f} x_3 dt \right]$$

Modellgleichungen:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{c u_3 u_1}{x_5}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{c u_3 u_2}{x_5} - g$$

$$\dot{x}_5 = -u_3$$

Beschränkungen:

$$u_1^2 + u_2^2 = 1$$

$$0 \le u_3 \le k\, F_{\max}$$

Anfangszustand:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_0, \quad x_4(0) = \left.\frac{dx_2}{dt}\right|_0, \quad x_5(0) = m_0$$

Endzustand:

$$x_2(t_f) = y_f, \quad x_5(t_f) = m_f$$

Lösen mit dem Maximum-Prinzip

Hamilton-Funktion: $$H = -x_3 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 \frac{c u_3 u_1}{x_5} + \lambda_4 \left(\frac{c u_3 u_2}{x_5} - g \right) - \lambda_5 u_3$$

Nach $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$
$$\dot{\lambda}_2 = 0$$
$$\dot{\lambda}_3 = 1 - \lambda_1$$
$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_2$$
$$\dot{\lambda}_5 = \frac{c}{x_5^2}(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) u_3$$

Nach $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\mu}$ $\qquad \lambda_1(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0$

Aufgrund $x_2(t_f) = y_f$, $x_5(t_f) = m_f$ müssen $\lambda_2(t_f), \lambda_5(t_f)$ bestimmt werden.

Daher

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(t_f) = 0$$
$$\lambda_2(t) = \lambda_2(t_f) = const.$$
$$\lambda_3(t) = -(t_f - t)$$
$$\lambda_4(t) = \lambda_2(t_f)(t_f - t)$$

Lösen mit dem Maximum-Prinzip

Weil $$H(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t)) = \min_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}^*(t))$$

Hamilton-Funktion: $$H = -x_3 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 \frac{cu_3u_1}{x_5} + \lambda_4\left(\frac{cu_3u_2}{x_5} - g\right) - \lambda_5 u_3$$

Daher $$\tilde{H} = \lambda_3 \frac{cu_3u_1}{x_5} + \lambda_4 \frac{cu_3u_2}{x_5} - \lambda_5 u_3 = \left[\frac{c}{x_5}(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) - \lambda_5\right] u_3 = \eta\, u_3$$

mit $$\eta = \left[\frac{c}{x_5}(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) - \lambda_5\right]$$

Zur Minimierung von $\tilde{H}$ muss

$$u_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad \eta > 0 \\ u_{3\max}, & \text{wenn} \quad \eta < 0 \end{cases}$$

D.h. die optimale Antriebskraft ist eine Schaltungsfunktion.

Fachgebiet Prozessoptimierung

Lösen mit dem Maximum-Prinzip

Daher $$\tilde{H} = \lambda_3 \frac{c u_3 u_1}{x_5} + \lambda_4 \frac{c u_3 u_2}{x_5} - \lambda_5 u_3 = \left[\frac{c}{x_5} \left(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 \right) - \lambda_5 \right] u_3 = \eta \, u_3$$

mit $$\eta = \left[\frac{c}{x_5} \left(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 \right) - \lambda_5 \right]$$

Zur Bestimmung von u_1, u_2 :

$$\left(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 \right) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \left\| (u_1, u_2) \right\| \left\| (\lambda_3, \lambda_4) \right\| \cos \alpha$$

Die zwei Vektoren müssen antiparallel sein!

Daher: $$\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = -\frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}$$

$$\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = -\frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Lösen mit dem Maximum-Prinzip

Da $\lambda_3(t) = -(t_f - t), \quad \lambda_4(t) = \lambda_2(t_f)(t_f - t), \; u_1^2 + u_2^2 = 1$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)}} = const.$$

$$u_2 = -\frac{\lambda_2(t_f)}{\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)}} = const.$$

Daher $$\tan\theta = \frac{u_2}{u_1} = -\lambda_2(t_f) = const.$$

Nun $$\tilde{H} = \left[\frac{c}{x_5}\left(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2\right) - \lambda_5\right] u_3$$

$$= \left[\frac{c}{x_5}\left(-\frac{t_f - t}{\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)}} - \frac{\lambda_2^2(t_f)(t_f - t)}{\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)}}\right) - \lambda_5\right] u_3$$

$$= \left[-\frac{c}{x_5}\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)}\,(t_f - t) - \lambda_5\right] u_3$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

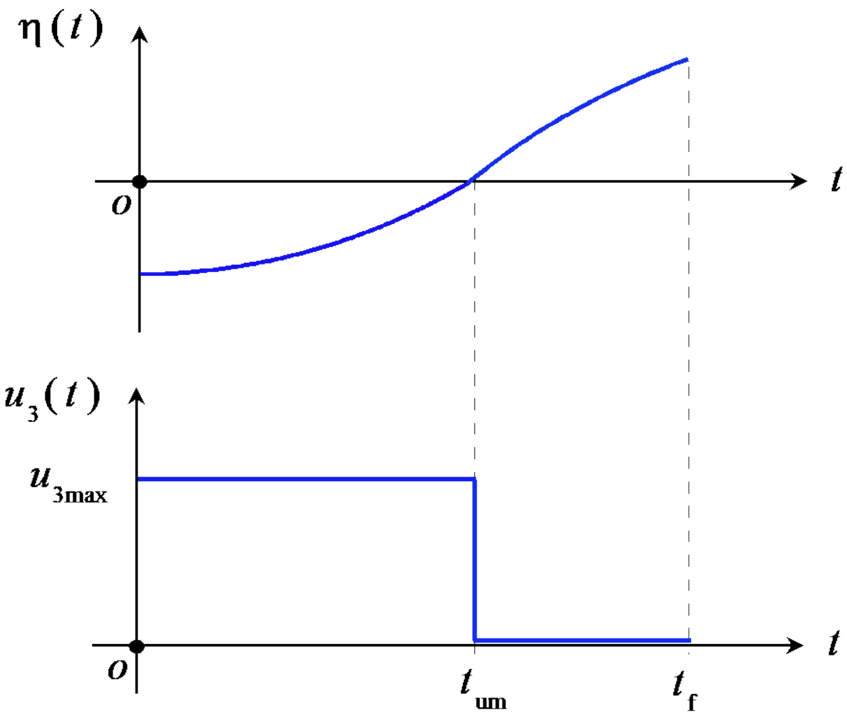
Lösen mit dem Maximum-Prinzip

$$\tilde{H} = \left[-\frac{c}{x_5}\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)}(t_f - t) - \lambda_5 \right] u_3 = \eta\, u_3$$

Nun $$\eta(t) = -\frac{c}{x_5}\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)}(t_f - t) - \lambda_5$$

Es war $$u_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad \eta > 0 \\ u_{3\max}, & \text{wenn} \quad \eta < 0 \end{cases}$$

Da $$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{c}{x_5}\sqrt{1+\lambda_2^2(t_f)} > 0$$



Das ist eine monotone Funktion.
Daher gibt es nur einen einzigen Umschaltungspunkt.

Trotz der Vereinfachung ist eine analytische Lösung nicht möglich!

Bang-Bang-Control

Lösung von Zeitoptimalproblemen unter Steuerungsbeschränkungen

Zielfunktional: $$J = \min_{\mathbf{u}} \int_{t_0}^{t_f} dt = \min_{\mathbf{u}} (t_f - t_0)$$

Modellgleichungen: $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t),t)\mathbf{u}(t)$$

Anfangsbedingung: $$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Endbedingung: $$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f),t_f) = \mathbf{0}$$

Steuerungsbeschränkungen: $$|u_j| \le 1, \quad j = 1,\cdots,m$$

Wie löst man das Problem?

Hamilton-Funktion: $$H = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t),t)\mathbf{u}(t)\right]$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Bang-Bang-Control

Die Optimalitätsbedingungen (nach dem Maximum-Prinzip):

Zustandsgleichungen: $$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t),t)\mathbf{u}(t)$$

Kozustandsgleichungen: $$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{x}}\right)\boldsymbol{\lambda}$$

Randbedingungen: $$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f),t_f) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu}$$

Hamiltonfkt. bei $t = t_f$: $$H(t_f) = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_f),t_f) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t_f),t_f)\mathbf{u}(t_f)\right] = \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial t_f}\boldsymbol{\mu}$$

Extrembedingung: $$1 + \boldsymbol{\lambda}^T\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t),t)\mathbf{u}^*(t)\right]$$
$$= \min_{|u_j|\le 1}\left\{1 + \boldsymbol{\lambda}^T\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t),t)\mathbf{u}(t)\right]\right\}$$

Bang-Bang-Control

Extrembedingung: $$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t),t)\mathbf{u}^*(t) = \min_{|u_j|\le 1} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t),t)\mathbf{u}(t)$$

Hierbei ist $\mathbf{u}^*$ zu bestimmen. Da

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}\mathbf{u} = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{im}\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$= u_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{i1} + \cdots + u_m \sum_{i=1}^n \lambda_i b_{im} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_{ij}\right) u_j = \sum_{j=1}^m q_j u_j$$

Daher $$\min_{|u_j|\le 1} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}\mathbf{u} = \min_{|u_j|\le 1} \sum_{j=1}^m q_j(t) u_j(t)$$

Wenn die Steuervariablen miteinander unabhängig sind:

$$\min_{|u_j|\le 1} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}\mathbf{u} = \sum_{j=1}^m \min_{|u_j|\le 1} q_j(t) u_j(t)$$

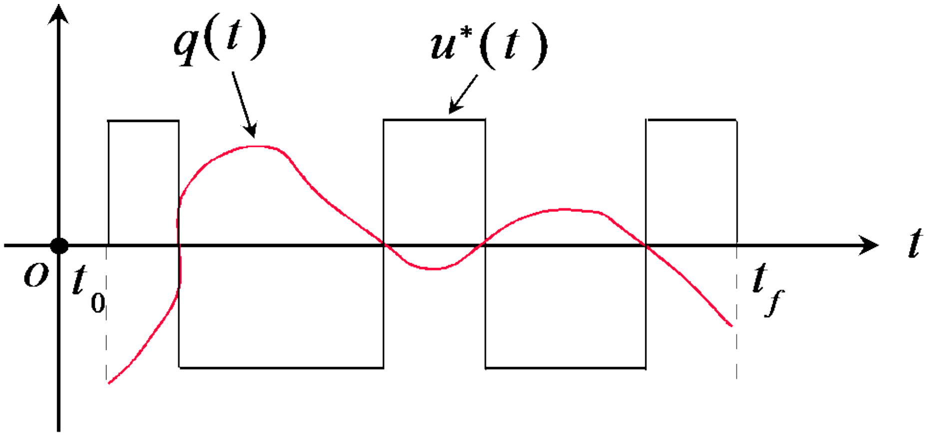
Zur Minimierung dieser Funktion muss $$u_j^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{wenn} \quad q_j(t) > 0 \\ 1, & \text{wenn} \quad q_j(t) < 0 \end{cases}$$

Das ist die sog. „Bang-Bang-Control“ („Bang-Bang-Steuerung“).

Singuläre Probleme:

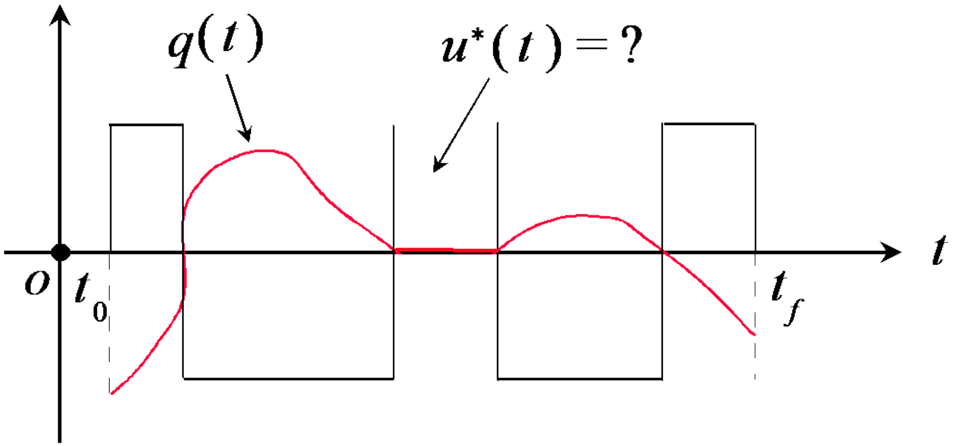
Reguläre Probleme:

$$u_j^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{wenn} \quad q_j(t) > 0 \\ 1, & \text{wenn} \quad q_j(t) < 0 \end{cases}$$



Singuläre Probleme:

$$u_j^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{wenn} \quad q_j(t) > 0 \\ 1, & \text{wenn} \quad q_j(t) < 0 \end{cases}$$



In manchen Zeitbereichen:

$$q_j(t) = 0$$

Eine neue Bedingung wird benötigt, um $u^*(t)$ in diesen Bereichen zu bestimmen.

Es gibt noch keine Lösung für nichtlineare zeitvariante Probleme.

Zeitoptimale Steuerung linearer zeitinvarianter Systeme:

Zielfunktional: $$J = \min_{\mathbf{u}} \int_0^{t_f} dt = \min_{\mathbf{u}} \; t_f$$

Modellgleichungen: $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Anfangsbedingung: $$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Endbedingung: $$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$$

Steuerungsbeschränkungen: $$\left|u_j\right| \leq 1, \quad j = 1, \cdots, m$$

Hamilton-Funktion: $$H = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T \left[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right]$$

Die Optimalitätsbedingungen (nach dem Maximum-Prinzip):

Nach $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ ergibt sich $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$, dann $\boldsymbol{\lambda}(t) = \left[\exp\left(-\mathbf{A}^T t\right)\right]\boldsymbol{\lambda}(0)$

Hamiltonfkt. bei $t = t_f$: $$H(t_f) = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T(t_f)\left[\mathbf{A}\mathbf{x}(t_f) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t_f)\right] = \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial t_f}\boldsymbol{\mu} = 0$$

Da t_f eine Variable ist, $\boldsymbol{\lambda}(t_f) \neq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) \neq \mathbf{0}$

Zeitoptimale Steuerung linearer zeitinvarianter Systeme:

Die optimale Steuerung:
$$u_j^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{wenn} \quad q_j(t) > 0 \\ 1, & \text{wenn} \quad q_j(t) < 0 \end{cases}$$

mit
$$q_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) b_{ij} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b}_j = \mathbf{w}^T \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{b}_j$$

Es wird angenommen: $\boldsymbol{\lambda}(0) = \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$

Wenn trotzdem in einem Bereich $[t_1, t_2]$ $q_j(t) = \mathbf{w}^T \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{b}_j = 0$

dann
$$q_j(t) = \mathbf{w}^T \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{b}_j = 0$$
$$\dot{q}_j(t) = (-1)\mathbf{w}^T \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{A}\mathbf{b}_j = 0$$
$$\ddot{q}_j(t) = (-1)^2 \mathbf{w}^T \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{A}^2\mathbf{b}_j = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$q_j^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} \mathbf{w}^T \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{b}_j = 0$$

Zeitoptimale Steuerung linearer zeitinvarianter Systeme:

D.h. $\mathbf{w}^T \exp(-\mathbf{A}t)[\mathbf{b}_j \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_j \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_j \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{b}_j] = \mathbf{0}$

Da $\boldsymbol{\lambda}(0) = \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ und $\exp(-\mathbf{A}t) \neq \mathbf{0}$

muss die $n \times n$ Matrix $\mathbf{G}_j = [\mathbf{b}_j \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_j \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_j \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{b}_j]$
singulär sein.

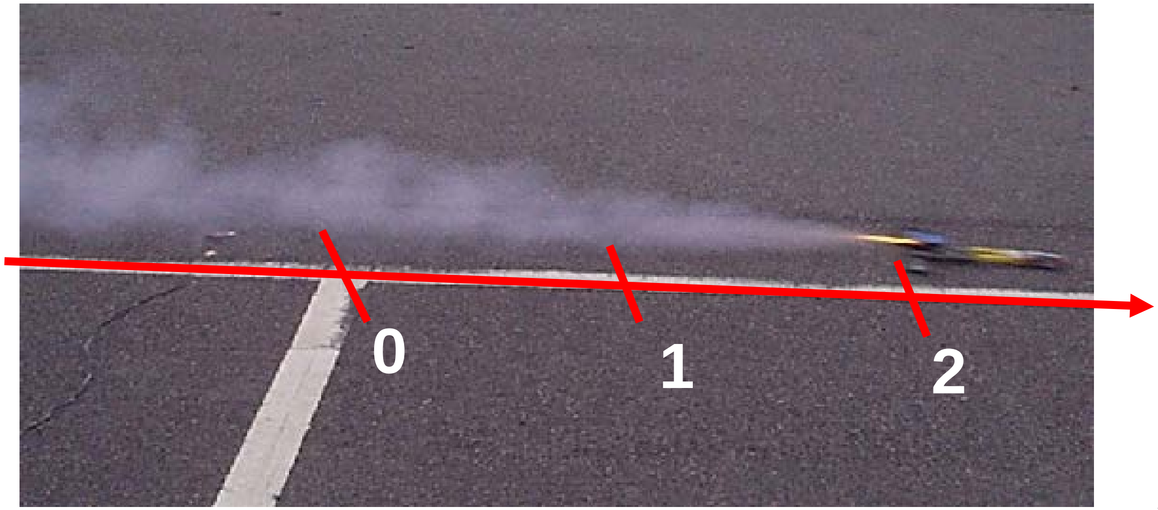
D.h. $\det(\mathbf{G}_j) = 0$ nämlich $Rang(\mathbf{G}_j) < n$ (nicht vollständig steuerbar!)

Also ist das zeitoptimale Problem singulär, wenn das System nicht vollständig steuerbar ist.

Wenn $Rang(\mathbf{G}_j) = n, \quad j = 1, \cdots, m$ dann ist das Problem regulär.

Es kann mathematisch bewiesen werden, dass die maximale Anzahl der Umschaltungszeitpunkte n-1 ist.

Optimalsteuerung eines Raketenwagens:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\text{kg}$)

Anfangszustand:

$x_1(0) = 2\,\text{m}, \;\; x_2(0) = 1\,\text{m/s}$

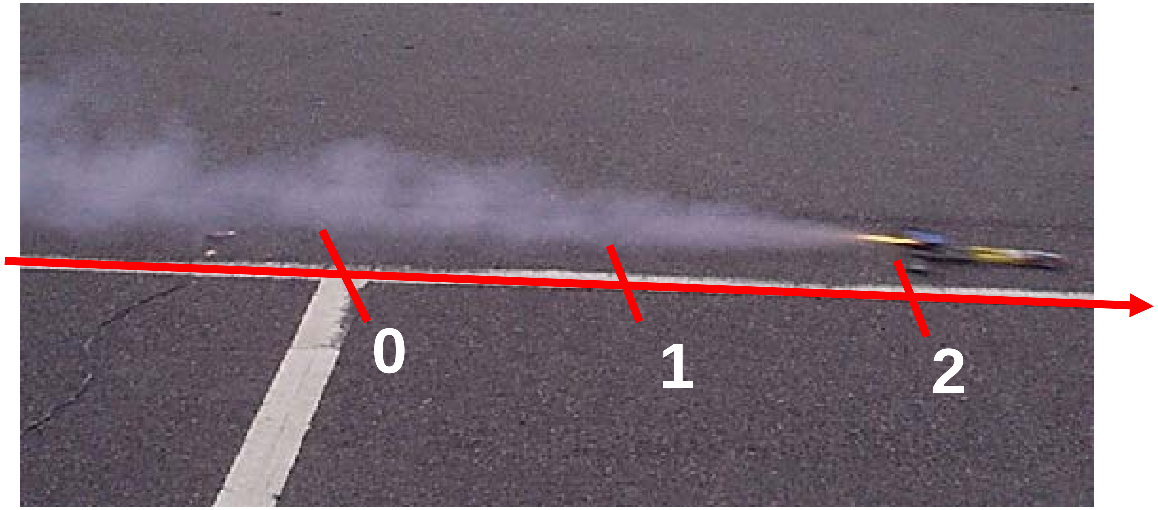
Der Wagen hat einen Antrieb für beide Richtungen.
Die Antriebskraft ist begrenzt.

Ziel: Positionierung des Wagens an der Position „0", wo er zum Stillstand gebracht wird.

Zielzustand: Position $x_1(t_f) = 0$, Geschwindigkeit $x_2(t_f) = 0$.

Welche ist die optimale Strategie, damit der Wagen so schnell wie möglich zum Endzustand fährt?

Optimalsteuerung des Raketenwagens:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\text{kg}$)

Das optimale Steuerungsproblem:

$$\min_{u(t)} \quad t_f$$

$$\text{mit} \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \qquad x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0$$

$$|u(t)| \le 1$$

Optimalsteuerung des Raketenwagens:

Modellgleichungen:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{G}_s = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Rang[\mathbf{G}_s] = 2$$

Das System ist nicht singulär. Es gibt maximal 1 Umschaltzeitpunkt.

Das Optimalsteuerungsproblem:

$$\min_{u(t)} \quad t_f$$

$$\text{mit} \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 2$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t) \qquad x_2(0) = 1$$
$$|u(t)| \le 1 \qquad x_1(t_f) = 0$$
$$x_2(t_f) = 0$$

Die Optimalitätsbedingungen:

Hamilton-Funktion: $H = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$

Zustandsgleichungen: $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$

Kozustandsgleichungen: $\dot{\lambda}_1(t) = 0, \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t)$

Randbedingungen: $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1$

$x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0$

Hamiltonfunktion bei $t = t_f$: $H(t_f) = 1 + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = 0$

Extrembedingung:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(t) b_i = \lambda_2(t)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{wenn} \quad q(t) > 0 \\ 1, & \text{wenn} \quad q(t) < 0 \end{cases}$$

Das ist die sog. „Bang-Bang-Control“ („Bang-Bang-Steuerung“).

Fachgebiet Prozessoptimierung

Lösung des Problems:

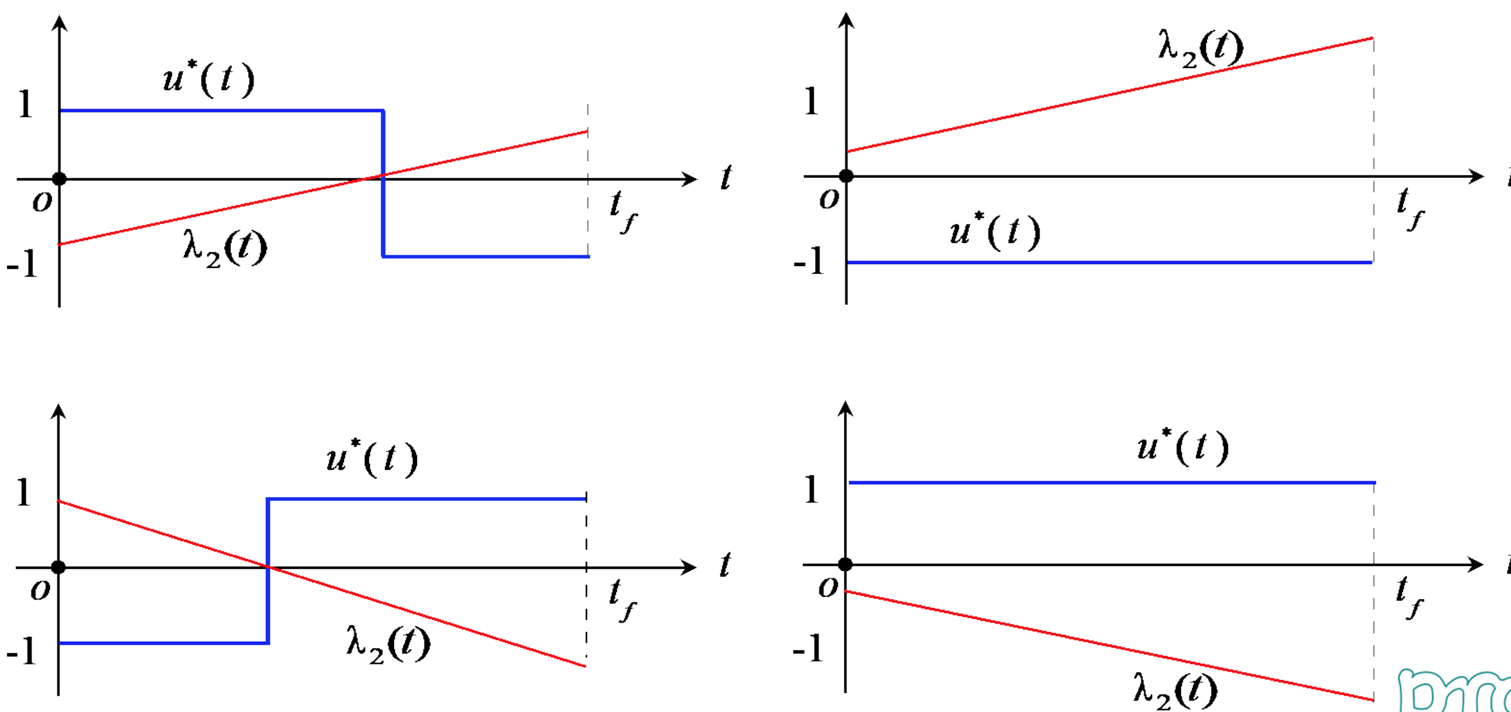
Da

$$\dot{\lambda}_1(t) = 0, \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t)$$

$$\lambda_1(t) = const. = w_1$$

$$\lambda_2(t) = w_2 - w_1 t$$

Es gibt 4 Möglichkeiten:



Lösung des Problems:

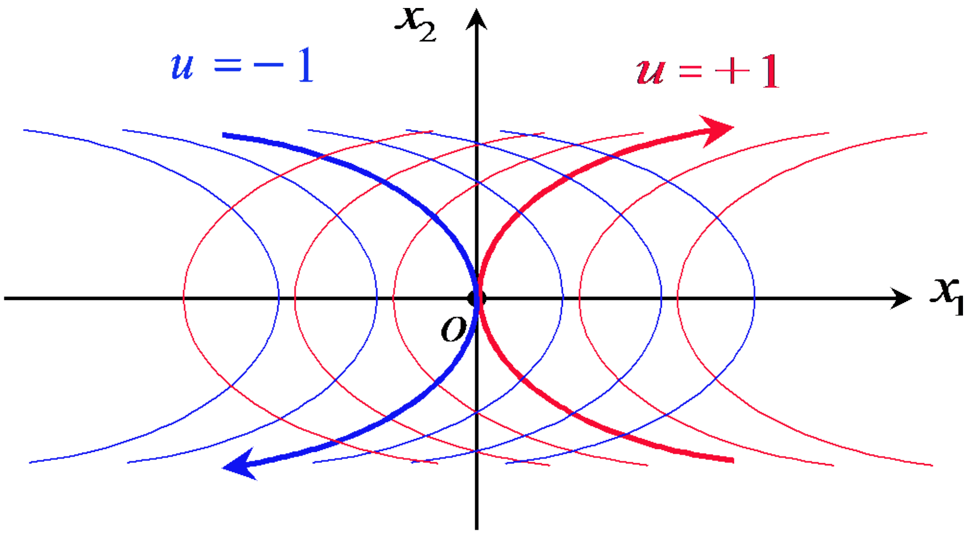
Da $$u^*(t) = \sigma = \pm 1$$

Modellgleichungen: $$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = x_{10}$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad x_2(0) = x_{20}$$

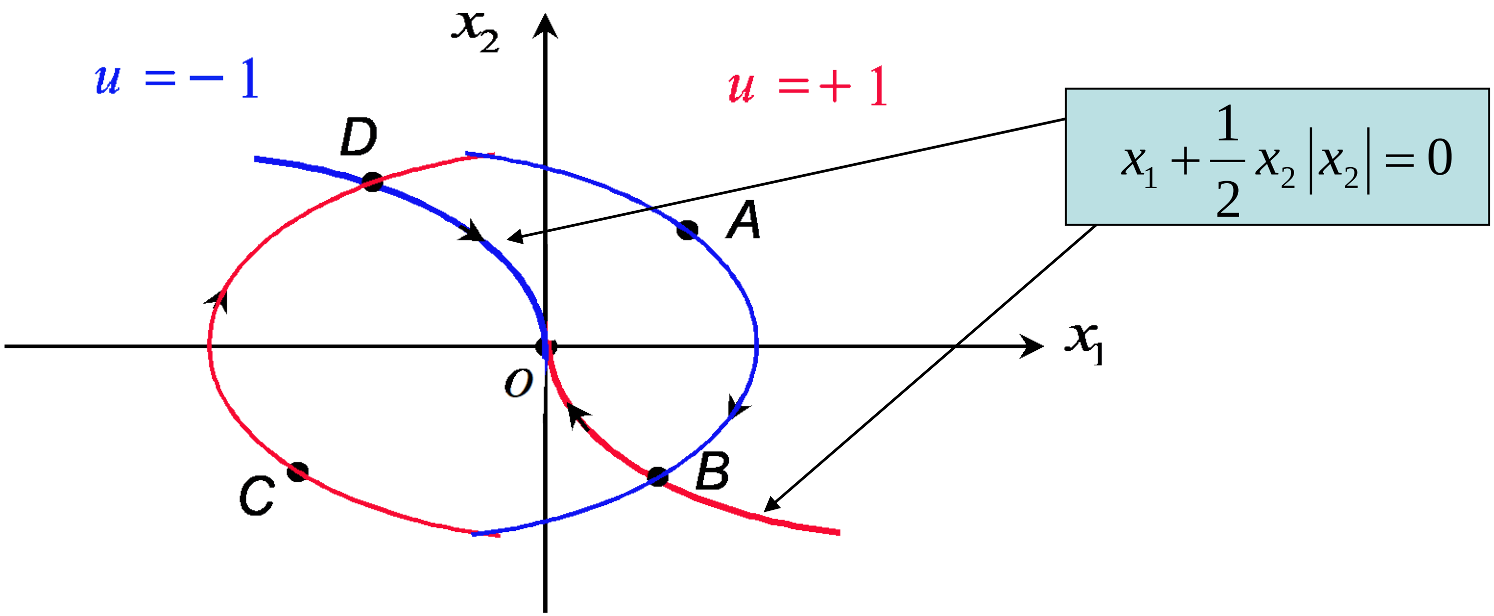
d.h. $$x_2(t) = \sigma t + x_{20}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\sigma t^2 + x_{20}t + x_{10}$$

Elimination von t $$x_1(t) = \frac{1}{2\sigma}x_2^2(t) + x_{10} - \frac{1}{2\sigma}x_{20}^2$$



Die Optimalstrategie:

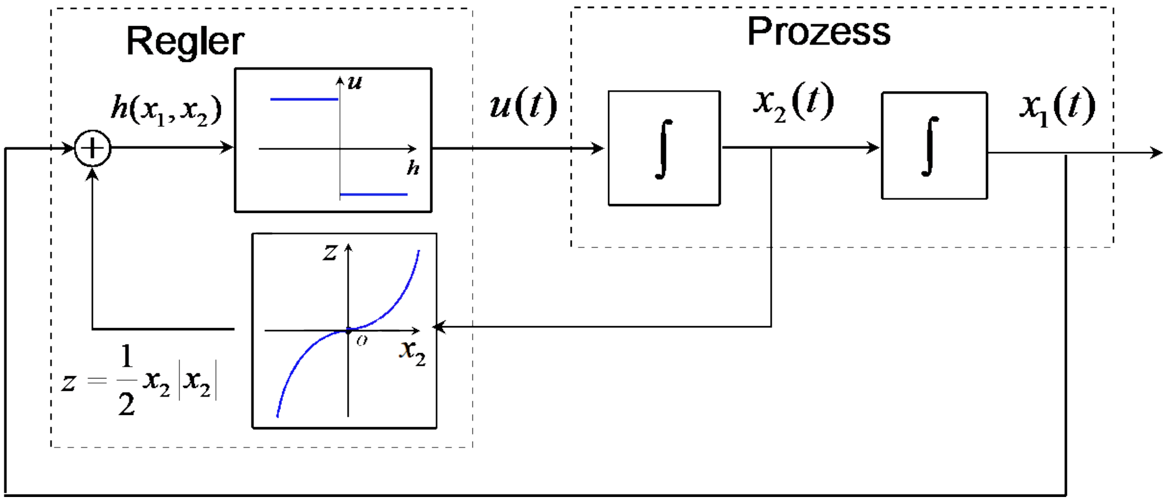


Die Funktion der Schaltkurve: $h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2|$

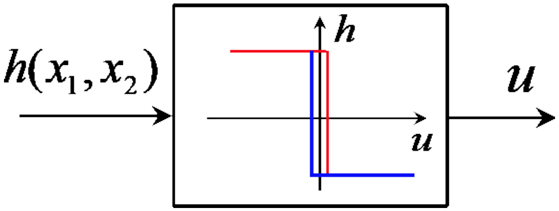
Optimale Steuerung:

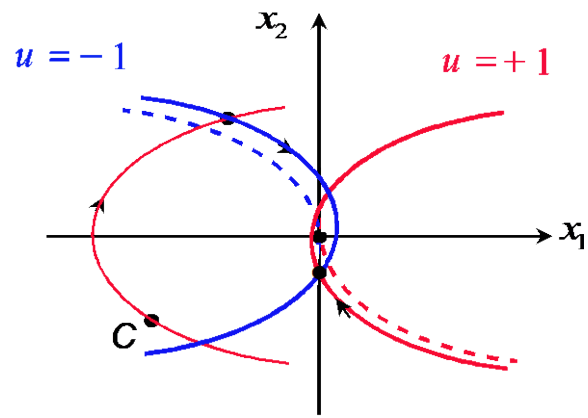
$$u^* = \begin{cases} +1 & \text{wenn } h(x_1, x_2) < 0 \\ -1 & \text{wenn } h(x_1, x_2) > 0 \\ -\operatorname{sgn}(x_2) & \text{wenn } h(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Das geschlossene System (Regelung):



Wenn $h(x_1,x_2)=0$





Da

$$x_2(t) = \sigma t + x_{20}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\sigma t^2 + x_{20}t + x_{10}$$

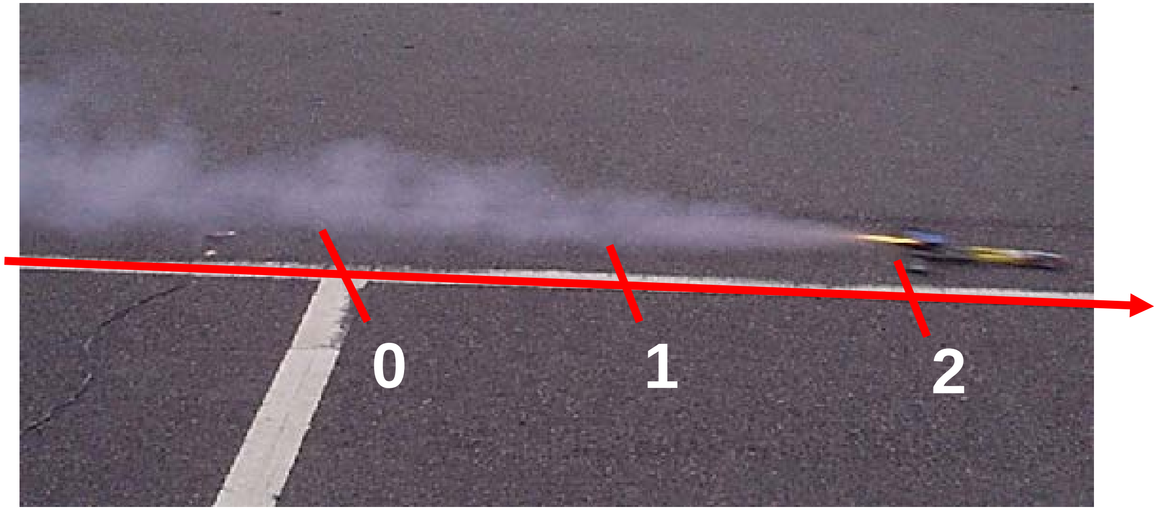
$$x_1(t) = \frac{1}{2\sigma}x_2^2(t) + x_{10} - \frac{1}{2\sigma}x_{20}^2$$

Die optimale Betriebszeit:

$$t_f^* = \begin{cases} -x_{20} + \sqrt{-4x_{10} + 2x_{20}^2} & \text{wenn } h(x_{10},x_{20}) < 0 \\ x_{20} + \sqrt{4x_{10} + 2x_{20}^2} & \text{wenn } h(x_{10},x_{20}) > 0 \\ |x_{20}| & \text{wenn } h(x_{10},x_{20}) = 0 \end{cases}$$

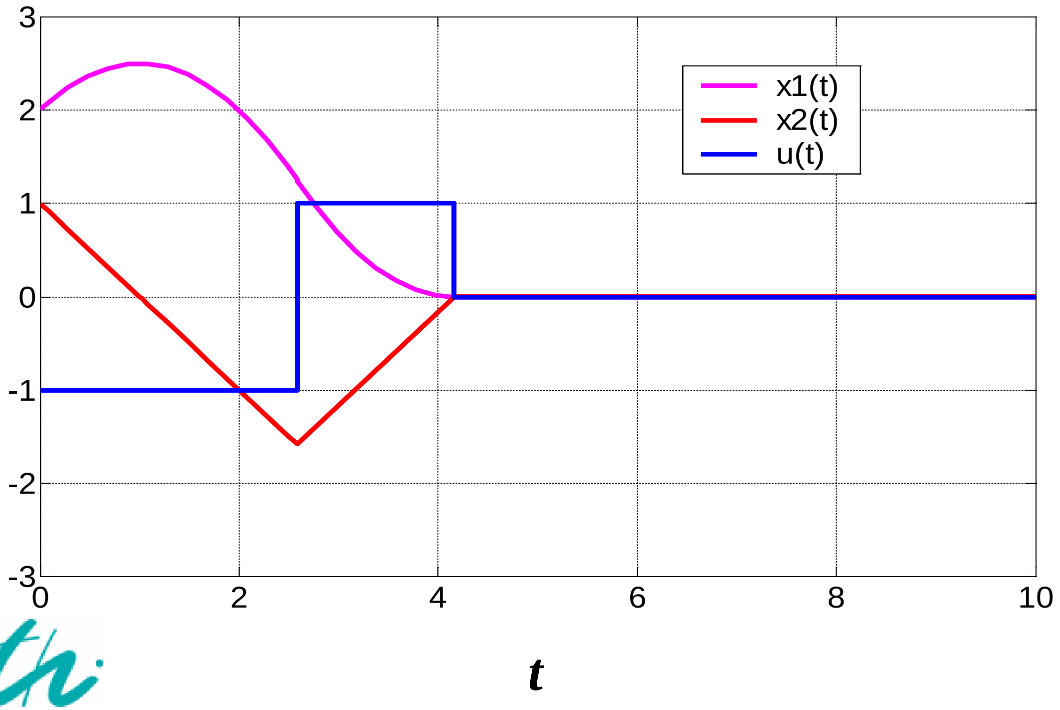
(Übungsaufgabe!)

Zeitoptimale Regelung des Raketenwagens:



$$\min_u \int_0^{t_f} dt = t_f$$

mit
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 2$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t) \qquad x_2(0) = 1$$
$$|u| \le 1$$



Anforderung:

$$x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$$

Das Ergebnis:

$$t_{UM} = 2{,}58$$
$$t_f = 4{,}16$$

(Übungsaufgabe!)

Fachgebiet Prozessoptimierung