Optimale Steuerung 2

Kapitel 5: Dynamische Programmierung

Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Optimale Fahrtroute

Welcher ist der kürzeste Weg von Rostock nach München?

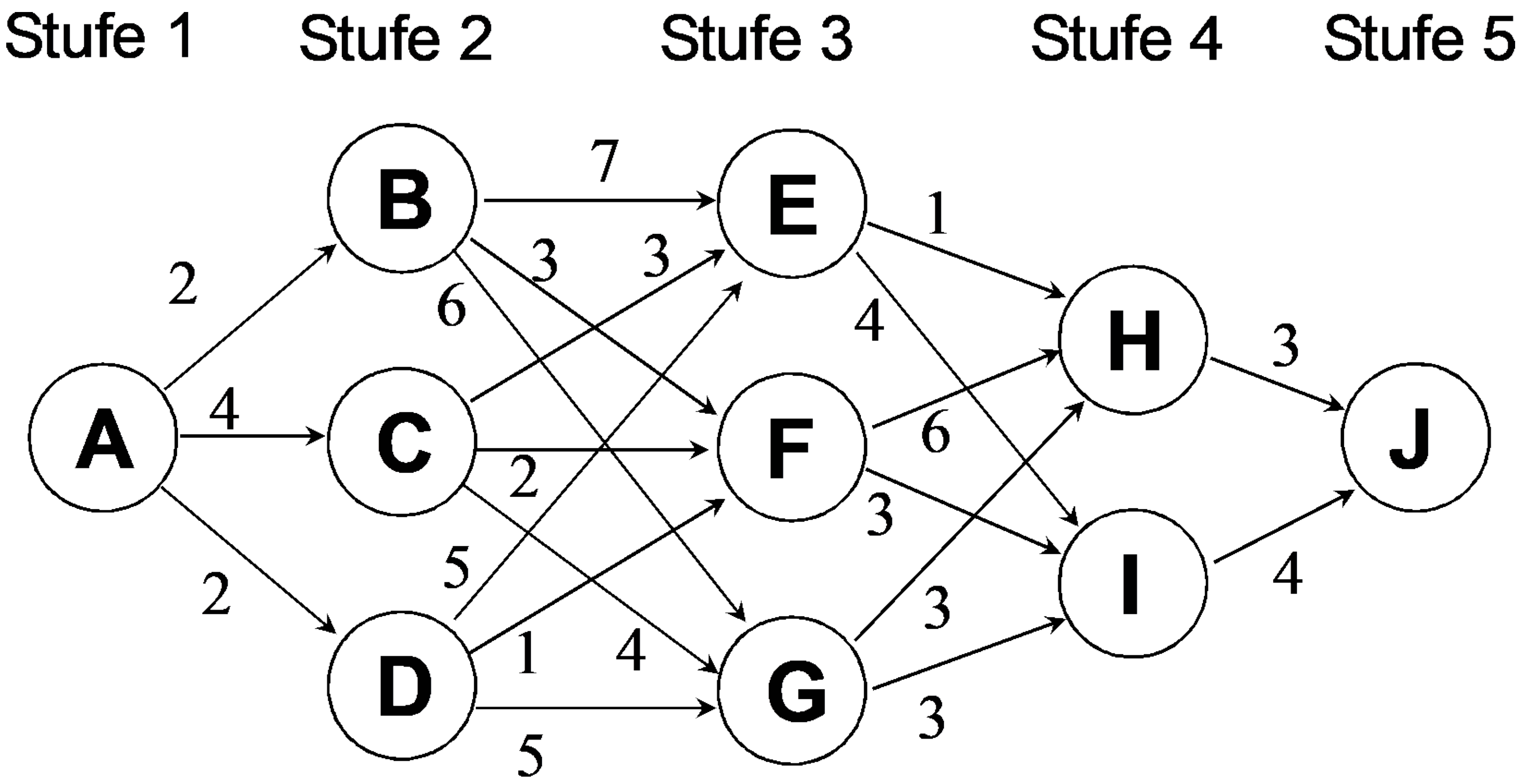
Es existiert die Autobahn, die die Städte verbindet.

Die Abstände von Stadt zu Stadt sind bekannt.

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Optimale Fahrtroute

Herausfinden des kürzesten Wegs von A zu J



Problemdarstellung

S : ein Ort ($A, B, \ldots, J$)

Z : ein Ort ($A, B, \ldots, J$)

c_{SZ} : Abstand von S zu Z

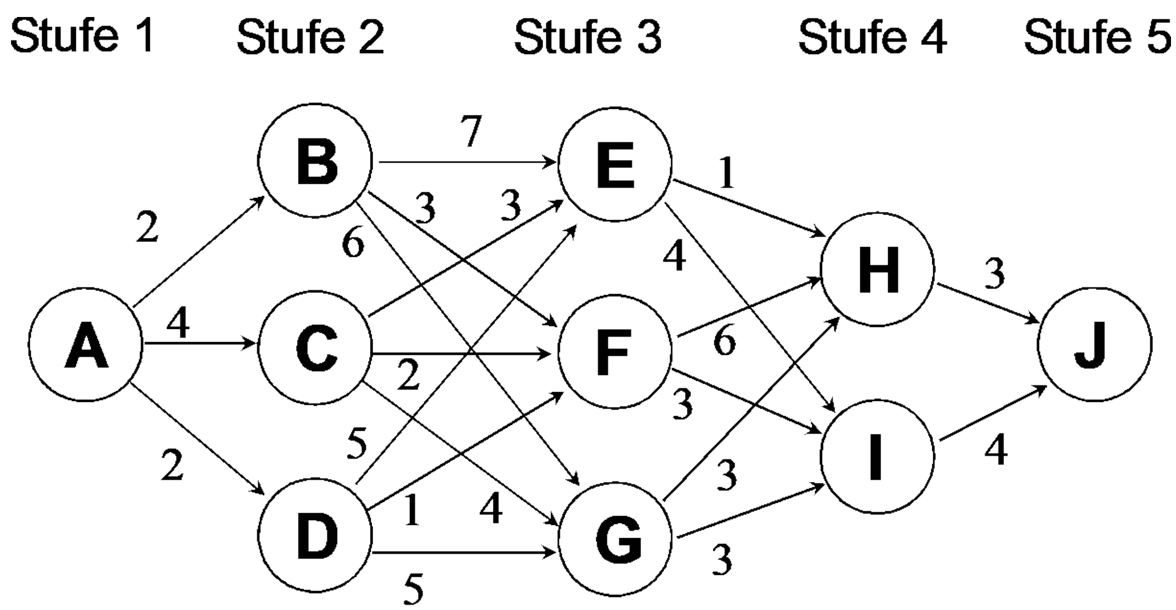
j : eine Stufe ($1, 2, \ldots, 5$)

$L_j(S)$: der kürzeste Weg von S zu J

Man fängt hinten mit Stufe 5 an:

Stufe 5: $L_5(J) = 0$

Stufe 4: $L_4(H) = 3, \; L_4(I) = 4$



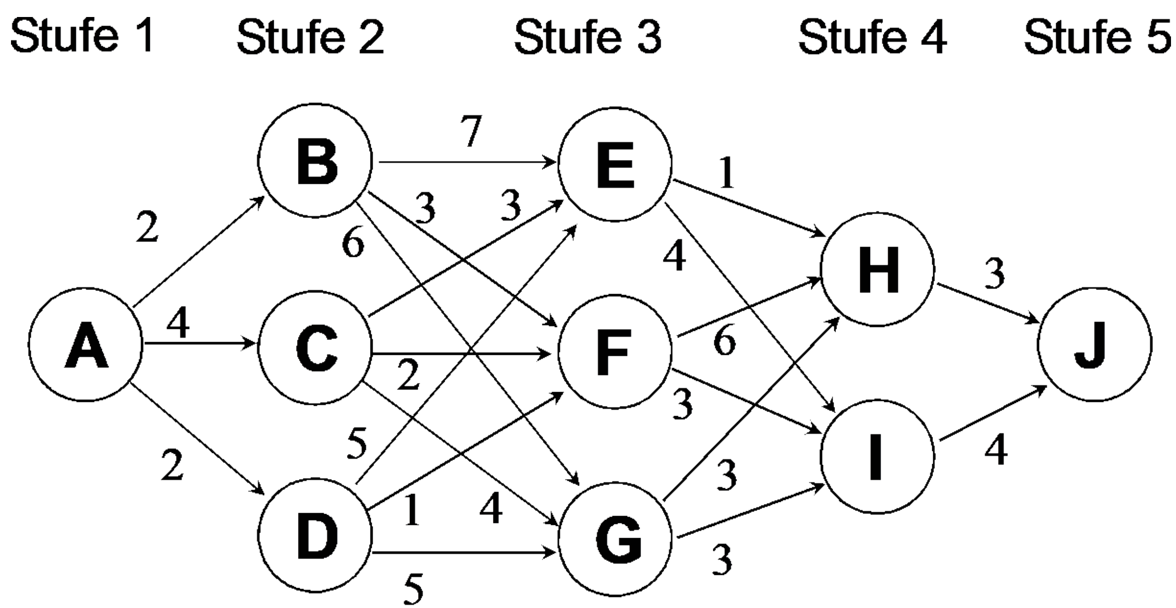
Analyse des Problems $L_4(H) = 3, \; L_4(I) = 4$

Stufe 3: $L_3(E) = \min\{1 + L_4(H), \quad 4 + L_4(I)\} = 4$ d.h. $E \to H$

$L_3(F) = \min\{6 + L_4(H), \quad 3 + L_4(I)\} = 7$ d.h. $F \to I$

$L_3(G) = \min\{3 + L_4(H), \quad 3 + L_4(I)\} = 6$ d.h. $G \to H$

Die allgemeine Formel: $$L_j(S) = \min_{Z \text{ in Stufe } j+1} \{c_{SZ} + L_{j+1}(Z)\}$$



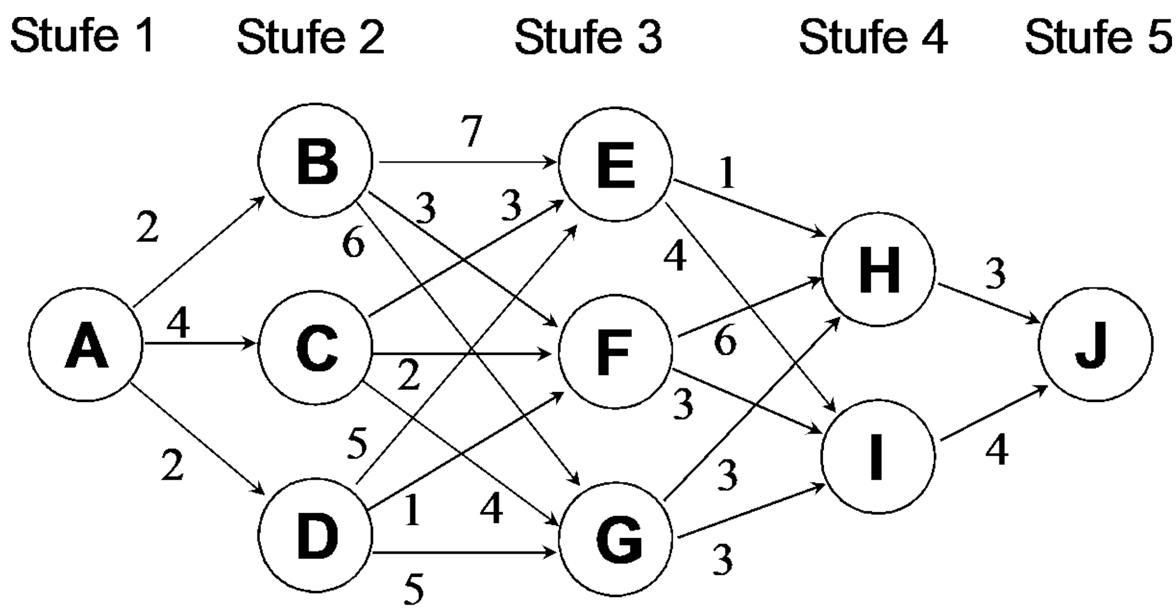
Stufe 2: $L_3(E)=4,\ L_3(F)=7,\ L_3(G)=6$

$$L_2(B)=\min\left\{7+L_3(E),\quad 3+L_3(F),\quad 6+L_3(G)\right\}=10 \quad \text{d.h.} \quad B\to F$$

$$L_2(C)=\min\left\{3+L_3(E),\quad 2+L_3(F),\quad 4+L_3(G)\right\}=7 \quad \text{d.h.} \quad C\to E$$

$$L_2(D)=\min\left\{5+L_3(E),\quad 1+L_3(F),\quad 5+L_3(G)\right\}=8 \quad \text{d.h.} \quad D\to F$$

Wenn man in Stufe 2 ist, wird nur das Ergebnis von Stufe 3 benötigt!



Die Lösung des Problems

Stufe 1: $L_2(B) = 10,\ L_2(C) = 7,\ L_2(D) = 8$

$$L_1(A) = \min\left\{2 + L_2(B),\quad 4 + L_2(C),\quad 2 + L_2(D)\right\} = 10 \quad \text{d.h.} \quad A \to D$$

Der kürzeste (optimale) Weg:

$$A \to D \to F \to I \to J \qquad \text{mit 10 km}$$

Die Vorgehensweise zur Lösung:

1. Das Problem wird stufenweise dargestellt.
2. Jede Stufe hat einige Zustande.
3. Für einen betrachteten Zustand hängt die Entscheidung nur von den zukünftigen Zuständen oder Stufen ab.
4. Für die Entscheidung in Stufe j wird nur das Ergebnis von Stufe $j+1$ benötigt.
5. Man fängt in der letzten Stufe an.
6. Die Lösung findet man in der ersten Stufe.

Die Gesamtberechnung

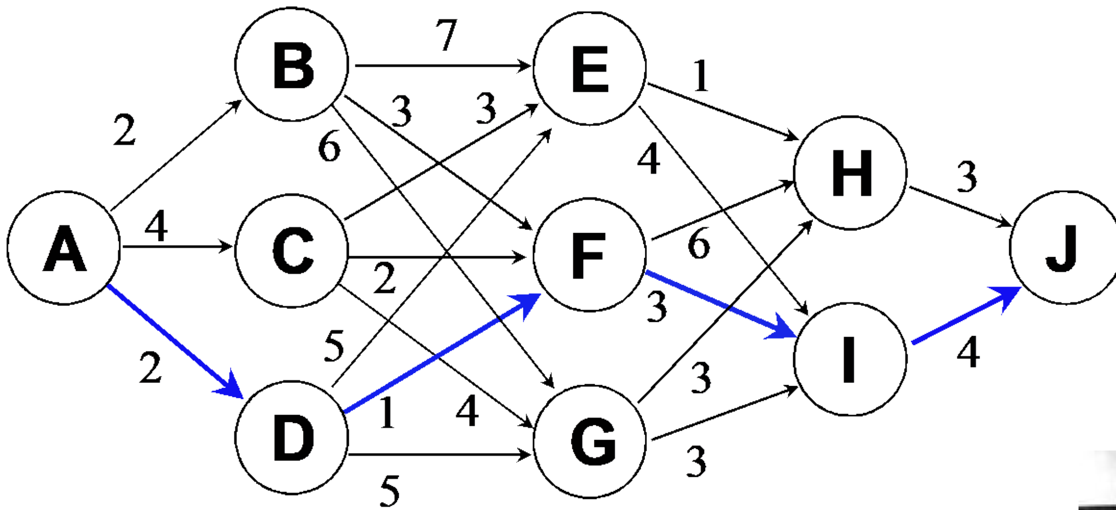
$$
\begin{aligned}
L_1(A) &= \min\begin{Bmatrix} 2+f_2(B) \\ 4+f_2(C) \\ 2+f_2(D) \end{Bmatrix}
= \min\begin{Bmatrix}
2+\min\begin{Bmatrix} 7+f_3(E) \\ 3+f_3(F) \\ 6+f_3(G) \end{Bmatrix} \\
4+\min\begin{Bmatrix} 3+f_3(E) \\ 2+f_3(F) \\ 4+f_3(G) \end{Bmatrix} \\
2+\min\begin{Bmatrix} 5+f_3(E) \\ 1+f_3(F) \\ 5+f_3(G) \end{Bmatrix}
\end{Bmatrix} \\
&= \min\begin{Bmatrix}
2+\min\begin{Bmatrix} 7+\min\begin{Bmatrix} 1+f_4(H) \\ 4+f_4(I) \end{Bmatrix} \\ 3+\min\begin{Bmatrix} 6+f_4(H) \\ 3+f_4(I) \end{Bmatrix} \\ 6+\min\begin{Bmatrix} 3+f_4(H) \\ 3+f_4(I) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \\
4+\min\begin{Bmatrix} 3+\min\begin{Bmatrix} 1+f_4(H) \\ 4+f_4(I) \end{Bmatrix} \\ 2+\min\begin{Bmatrix} 6+f_4(H) \\ 3+f_4(I) \end{Bmatrix} \\ 4+\min\begin{Bmatrix} 3+f_4(H) \\ 3+f_4(I) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \\
2+\min\begin{Bmatrix} 5+\min\begin{Bmatrix} 1+f_4(H) \\ 4+f_4(I) \end{Bmatrix} \\ 1+\min\begin{Bmatrix} 6+f_4(H) \\ 3+f_4(I) \end{Bmatrix} \\ 5+\min\begin{Bmatrix} 3+f_4(H) \\ 3+f_4(I) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}
\end{Bmatrix} \\
&= \min\begin{Bmatrix}
2+\min\begin{Bmatrix} 7+\min\begin{Bmatrix} 1+\min\{3+f_5(J)\} \\ 4+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \\ 3+\min\begin{Bmatrix} 6+\min\{3+f_5(J)\} \\ 3+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \\ 6+\min\begin{Bmatrix} 3+\min\{3+f_5(J)\} \\ 3+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \\
4+\min\begin{Bmatrix} 3+\min\begin{Bmatrix} 1+\min\{3+f_5(J)\} \\ 4+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \\ 2+\min\begin{Bmatrix} 6+\min\{3+f_5(J)\} \\ 3+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \\ 4+\min\begin{Bmatrix} 3+\min\{3+f_5(J)\} \\ 3+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \\
2+\min\begin{Bmatrix} 5+\min\begin{Bmatrix} 1+\min\{3+f_5(J)\} \\ 4+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \\ 1+\min\begin{Bmatrix} 6+\min\{3+f_5(J)\} \\ 3+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \\ 5+\min\begin{Bmatrix} 3+\min\{3+f_5(J)\} \\ 3+\min\{4+f_5(J)\} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}
\end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Formel: $$L_j(S) = \min_{Z \text{ in Stufe } j+1} \left\{ c_{SZ} + L_{j+1}(Z) \right\}$$

Z muss eine Verbindung mit S haben.

$L_{j+1}(Z)$ muss vorhanden sein.

Das Prinzip der Optimalität



Der optimale Weg:

Anfang bei A: $A \to D \to F \to I \to J$

Anfang bei D: $D \to F \to I \to J$

Anfang bei F: $F \to I \to J$

Anfang bei I: $I \to J$

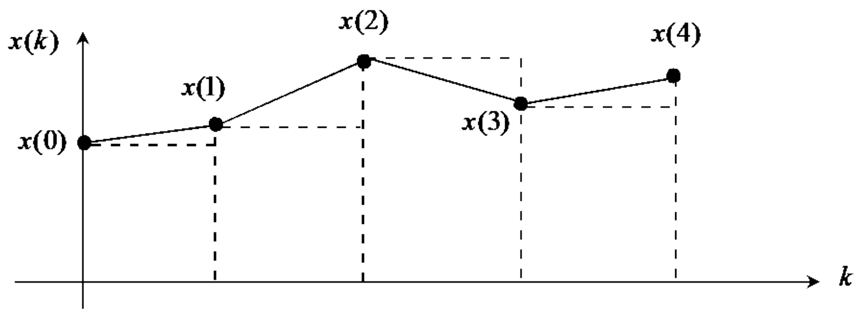
(1920 - 1984)

Ein Teil der optimalen Strategie ist auch optimal!

(Richard Bellman, 1952)

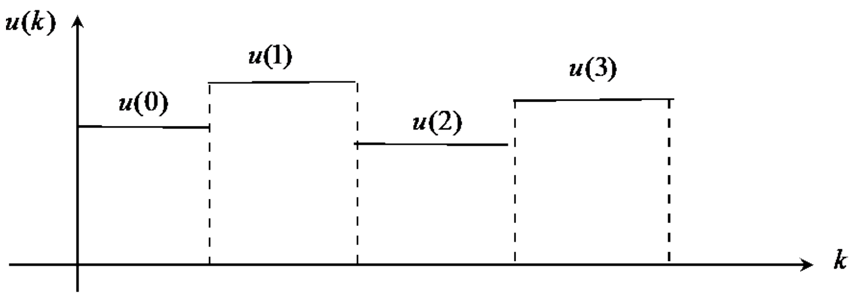
Fachgebiet Prozessoptimierung

Diskrete dynamische Systeme



Zustandsvariable: $x(k)$

Sie ist kontinuierlich aber nicht differenzierbar.



Steuervariable: $u(k)$

Sie ist stückweise konstant.

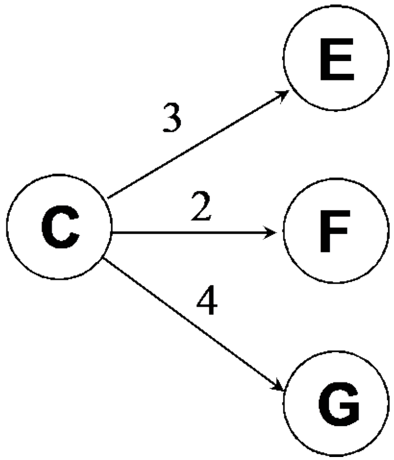
Die Modellgleichung: $x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad x(0) = x_0$

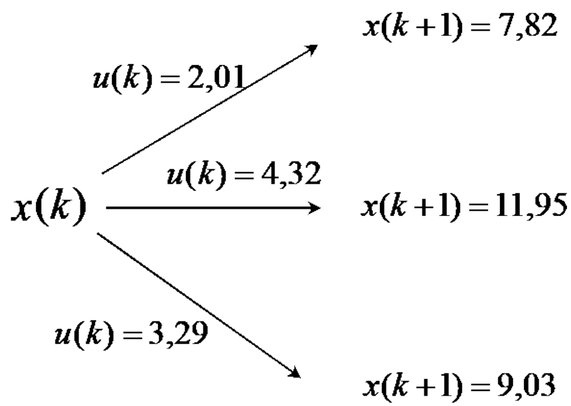
Die Zielfunktion: $J = \min\limits_{u(k)} \sum_{k=0}^{N-1} L(x(k), u(k))$

Optimale Steuerung: $u(0), u(1), \cdots, u(N-1)$

Dynamische diskrete Systeme

Darstellung von einem Zustand zum nächsten:





Die Möglichkeiten der Steuerungen und der Zustände sind begrenzt.

$$L^*(C) = \min_{\substack{u=2,3,4 \\ Z=E,F,G}} \left\{ u + L^*(Z,u) \right\}$$

Nur die Steuerung dieser Stufe ist zu optimieren.

Es gibt zahllose Möglichkeiten der Steuerungen und der Zustände.

$$L^*(x(k)) = \min_{\substack{u(k) \\ x(k+1)}} \left\{ L(x(k),u(k)) + L^*(x(k+1)) \right\}$$

Nur die Steuerung dieser Stufe $u(k)$ ist zu optimieren.

Betrachtung ab dem Zeitpunkt j:

$$J^*(x(j)) = \min_{u(j),\cdots,u(N-1)} \sum_{k=j}^{N-1} L(x(k),u(k))$$

$$= \min_{u(j),\cdots,u(N-1)} \left\{ L(x(j),u(j)) + \sum_{k=j+1}^{N-1} L(x(k),u(k)) \right\}$$

$$= \min_{u(j)} \{L(x(j),u(j))\} + \min_{u(j+1),\cdots,u(N-1)} \left\{ \sum_{k=j+1}^{N-1} L(x(k),u(k)) \right\}$$

Da

$$J^*(x(j+1)) = J^*(f(x(j),u(j)) = \min_{u(j+1),\cdots u(N-1)} \sum_{k=j+1}^{N-1} L(x(k),u(k))$$

Daher

$$J^*(x(j)) = \min_{u(j)} \{L(x(j),u(j))\} + \min_{u(j)} \{J^*(x(j+1))\}$$

$$= \min_{u(j)} \left\{ L(x(j),u(j)) + J^*(x(j+1)) \right\}$$

$$= \min_{u(j)} \left\{ L(x(j),u(j)) + J^*(f(x(j),u(j)) \right\}$$

Dieses Vorgehen führt zu einem iterativen Lösungsverfahren.

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel:

$$J = \min_{u(k)} \sum_{k=0}^{2} (x^2(k) + u^2(k)) + x^2(3)$$

$$\text{mit} \quad x(k+1) = x(k) + u(k)$$

Weil

$$J^*(x(j)) = \min_{u(j)} \left\{ L(x(j), u(j)) + J^*(x(j+1)) \right\}$$

$$= \min_{u(j)} \left\{ x^2(j) + u^2(j) + J^*(x(j+1)) \right\} \qquad j = 0, 1, 2$$

$$J^*(x(3)) = x^2(3) = \left[x(2) + u(2) \right]^2$$

Man fängt mit $j = 2$ an:

$$J^*(x(2)) = \min_{u(2)} \left\{ x^2(2) + u^2(2) + J^*(x(3)) \right\}$$

$$= \min_{u(2)} \left\{ x^2(2) + u^2(2) + \left[x(2) + u(2) \right]^2 \right\}$$

Mit gegebenem Anfangszustand für Intervall 2, $x(2)$

folgt die Lösung $u(2) = -\frac{1}{2} x(2)$

(Analytische Lösung! Häufig nicht erzielbar)

Fachgebiet Prozessoptimierung

Setzt man $u(2) = -\frac{1}{2}x(2)$ in

$$J^*(x(2)) = \min_{u(2)} \left\{ x^2(2) + u^2(2) + [x(2)+u(2)]^2 \right\} = \frac{3}{2}x^2(2)$$

Nun bei $j = 1$:

$$J^*(x(1)) = \min_{u(1)} \left\{ x^2(1) + u^2(1) + J^*(x(2)) \right\}$$

$$= \min_{u(1)} \left\{ x^2(1) + u^2(1) + \frac{3}{2}[x(1)+u(1)]^2 \right\}$$

In gleicher Weise kann man die Lösung erhalten:

$$u(1) = -\frac{3}{5}x(1), \quad J^*(x(1)) = \frac{8}{5}x^2(1)$$

Und bei $j = 0$:

$$u(0) = -\frac{8}{13}x(0), \quad J^*(x(0)) = \frac{21}{13}x^2(0)$$

(Übungsaufgabe!)

Die optimale Steuerung:

$$u^*(0) = -\frac{8}{13}x(0), \quad u^*(1) = -\frac{3}{5}x(1), \quad u^*(2) = -\frac{1}{2}x(2)$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung

Optimierung eines kontinuierlichen dynamischen Systems:

Die Modellgleichung: $\dot{x} = f(x,u), \quad x(t_0) = x_0$

Die Zielfunktion: $J(x(t_0)) = \min_u \left\{ S(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u)dt \right\}$

Optimale Steuerung: $u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f$

Die Diskretisierung des Systems mit Zeitintervall *h*:

$$x(t+h) = x(t) + h\ f(x(t),u(t)) + O(h)$$

$$J = \min_u \left\{ S(x(t_f)) + h \sum_{k=0}^{N-1} L(x(t),u(t)) \right\} + O(h)$$

$$\text{mit} \qquad t = t_0 + kh, \;\; h = \frac{t_f - t_0}{N}, \quad k = 0, \cdots, N-1$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Nach dem Prinzip der Optimalität:

$$J^*(x(j)) = \min_{u(j)} \left\{ L(x(j),u(j)) + J^*(x(j+1)) \right\} \quad \text{(diskret)}$$

Dann $$J^*(x(t)) = \min_{\substack{u(t)\\ t\in(t,t+h)}} \left\{ h\, L(x(t),u(t)) + J^*(x(t+h)) + O(h) \right\} \quad \text{(diskretisiert)}$$

Die Taylor-Entwicklung:

$$J^*(x(t+h)) = J^*(x(t)) + \frac{\partial J^*}{\partial t} h + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T [x(t+h) - x(t)] + O(h)$$

Daher

$$0 = \min_{\substack{u(t)\\ t\in(t,t+h)}} \left\{ h\, L(x(t),u(t)) + \frac{\partial J^*}{\partial t} h + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T [x(t+h) - x(t)] + O(h) \right\}$$

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\\ t\in(t,t+h)}} \left\{ L(x(t),u(t)) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + O(h) \right\}$$

$h \to 0$

$$\boxed{-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ L(x(t),u(t)) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T f(x(t),u(t)) \right\}}$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ L(x(t),u(t)) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T f(x(t),u(t)) \right\}$$

Die Randbedingung: $J^*(x(t_f)) = S(x(t_f))$

Hamilton-Funktion:

$$H(x,u,\lambda) = L(x(t),u(t)) + \lambda^T(t) f(x(t),u(t))$$

Definiert man $\frac{\partial J^*}{\partial x} = \lambda(t)$, dann

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ L(x(t),u(t)) + \lambda^T(t) f(x(t),u(t)) \right\}$$

Also $\min_{u(t)} H(x(t),u(t),\lambda(t)) = H(x(t),u^*(t),\lambda(t))$

Die Hamilton-Funktion wird minimiert nur mit $u^*(t)$.

(das Maximum-Prinzip, Pontryagin, 1958)

Fachgebiet Prozessoptimierung

Hamilton-Funktion:

$$\boxed{H(x,u,\lambda) = L(x(t),u(t)) + \lambda^T(t)\; f(x(t),u(t))}$$

dann $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x(t),u(t)) = \dot{x}$$

Weil $\dfrac{\partial J^*}{\partial x} = \lambda(t)$,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial J^*(x(t))}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 J^*(x(t))}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 J^*(x(t))}{\partial x^2}\dot{x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial J^*(x(t))}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 J^*(x(t))}{\partial x^2} f(x(t),u(t))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-L(x(t),u(t)) - \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T f(x(t),u(t))\right) + \frac{\partial^2 J^*(x(t))}{\partial x^2} f(x(t),u(t))$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2} f(x(t),u(t)) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \frac{\partial J^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 J^*(x(t))}{\partial x^2} f(x(t),u(t))$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \frac{\partial J^*}{\partial x} = -\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda\right) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

d.h. $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\dot{\lambda}}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Hamilton-Funktion: $H(x,u,\lambda) = L(x(t),u(t)) + \lambda^T(t) f(x(t),u(t))$

dann

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -\dot{\lambda} \end{aligned}}$$

Die Randbedingung $J^*(x(t_f)) = S(x(t_f))$ und $\frac{\partial J^*}{\partial x} = \lambda(t)$,

daher

$$\boxed{\lambda(t_f) = \left.\frac{\partial J^*}{\partial x}\right|_{t=t_f} = \frac{\partial S(x(t_f))}{\partial x(t_f)}}$$

Die obigen Gln. sind die notwendigen Bedingungen der optimalen Lösung von

$$J(x(t_0)) = \min_u \left\{ S(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u)dt \right\}$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \le t \le t_f$$

Beispiel: Optimale Ersatzstrategie:

Ziel: Kostenminimierung in den nächsten 5 Jahren

Randbedingungen:

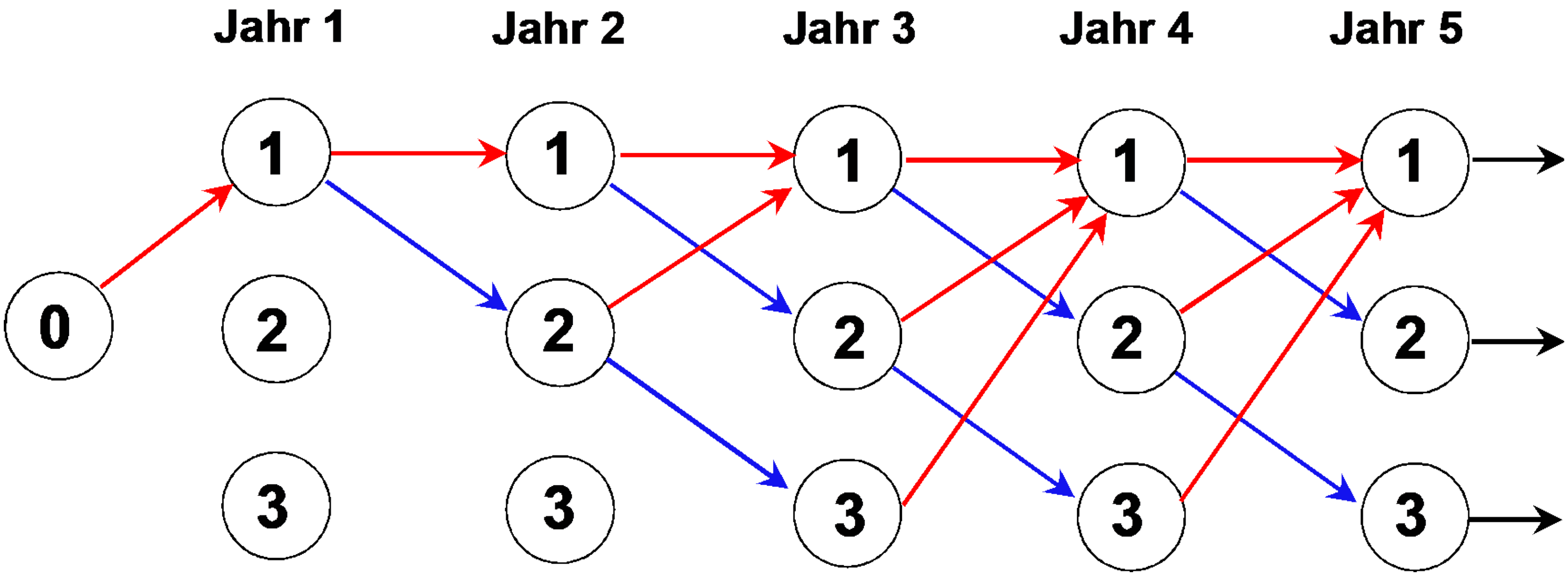
- Ein neues Auto kostet 100.000 €
- Kosten der Instandhaltung:

  1. Jahr: 6.000 €, 2. Jahr: 8.000 €, 3. Jahr: 12.000 €

- Verkaufspreis:

  1. Jahr: 80.000 €, 2. Jahr: 60.000 €, 3. Jahr: 50.000 €

Problemdarstellung:



Definition:

t : Jahr $(1, 2, \ldots, 5)$

x : Alter des Autos $(1, 2, 3)$

$f_t(x)$: Minimale Kosten vom Jahr t zum Jahr 5 beim Zustand x

Analyse des Problems:

Im Jahr *t* mit einem 3 Jahre alten Auto:

Das Auto muss verkauft werden.

Daher sind die minimalen Kosten (in T€): $f_t(3) = -50 + 100 + 6 + f_{t+1}(1)$

Im Jahr *t* mit einem 2 Jahre alten Auto:

Das Auto kann verkauft oder behalten werden.

Daher sind die minimalen Kosten:

$$f_t(2) = \min\{-60 + 100 + 6 + f_{t+1}(1), \quad 12 + f_{t+1}(3)\}$$

Im Jahr *t* mit einem 1 Jahr alten Auto:

Das Auto kann verkauft oder behalten werden.

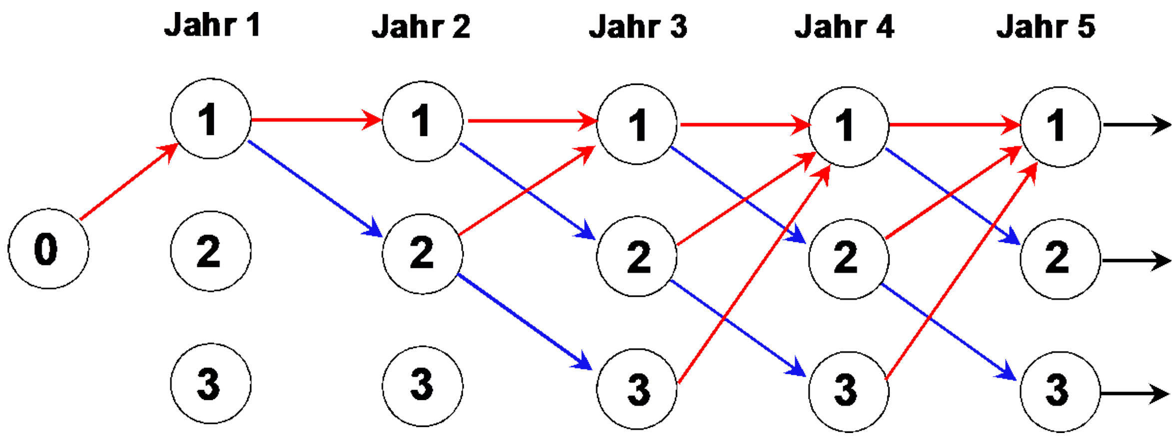
Daher sind die minimalen Kosten:

$$f_t(1) = \min\{-80 + 100 + 6 + f_{t+1}(1), \quad 8 + f_{t+1}(2)\}$$

Am Anfang muss ein neues Auto gekauft werden:

$$f_0(1) = 100 + 6 + f_1(1)$$

Analyse des Problems:



Man fängt hinten mit Jahr 5 an:

Jahr 5: das Auto wird auf jeden Fall verkauft.

Die Kosten: $f_5(1) = -80, \quad f_5(2) = -60, \quad f_5(3) = -50$

Jahr 4: es gibt 3 Möglichkeiten:

$f_4(1) = \min\{-80 + 100 + 6 + f_5(1), \quad 8 + f_5(2)\} = \min\{-54, \quad -52\} = -54$ d.h. verkaufen

$f_4(2) = \min\{-60 + 100 + 6 + f_5(1), \quad 12 + f_5(3)\} = \min\{-34, \quad -38\} = -38$ d.h. behalten

$f_4(3) = -50 + 100 + 6 + f_5(1) = -24$ d.h. verkaufen **(Übungsaufgabe!)**