Optimale Steuerung 2

Kapitel 6:

Riccati-Optimal-Regler

Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Herleitung und Anwendung des Riccati-Optimal-Reglers

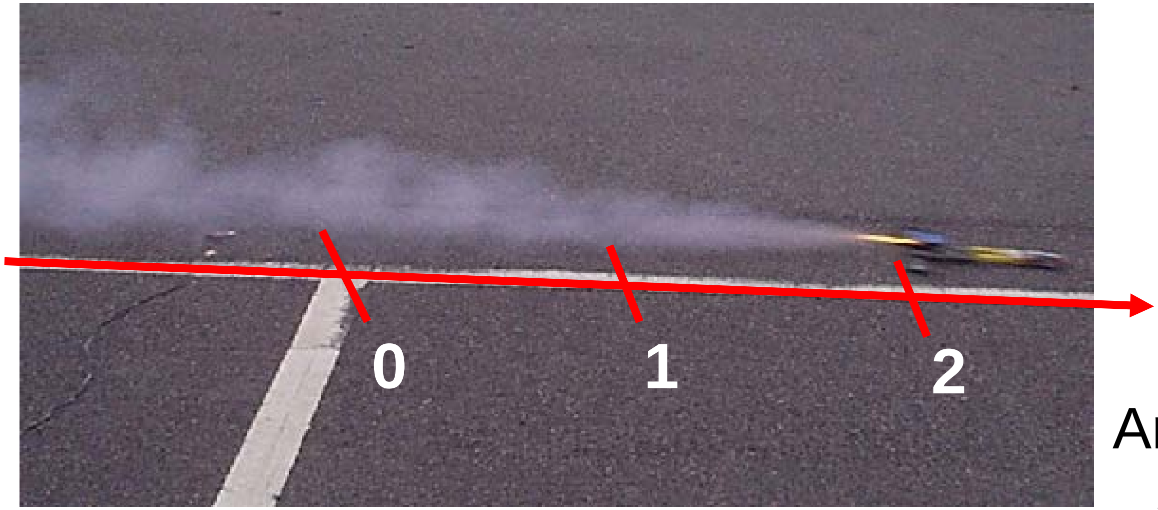
Vorkenntnisse:

- Grundlagen der Regelungstechnik
- Zustandsraumdarstellung
- Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Fragenstellungen:

- Welche Regelgüte hat ein Optimalregler?
- Welches Problem ist beim Reglerentwurf zu lösen?
- Warum muss man die Riccati-Gleichung lösen?
- Wie wird der Optimalregler implementiert?
- Welchen Anwendungsbereich hat der Regler?

Optimalregelung eines Raketenwagens:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\text{kg}$)

Anfangszustand:

$$x_1(0) = 2\,\text{m}, \; x_2(0) = 1\,\text{m/s}$$

Der Wagen hat einen Antrieb für beide Richtungen.

Ziel: Positionierung des Wagens an der Position „0“, wo er zum Stillstand gebracht wird.

Zielzustand: Position $x_1^S = 0$, Geschwindigkeit $x_2^S = 0$.

Welche ist die optimale Strategie, damit der Wagen zum Zielzustand überführt und zugleich die benötigte Kraft minimiert wird?

Fachgebiet Prozessoptimierung

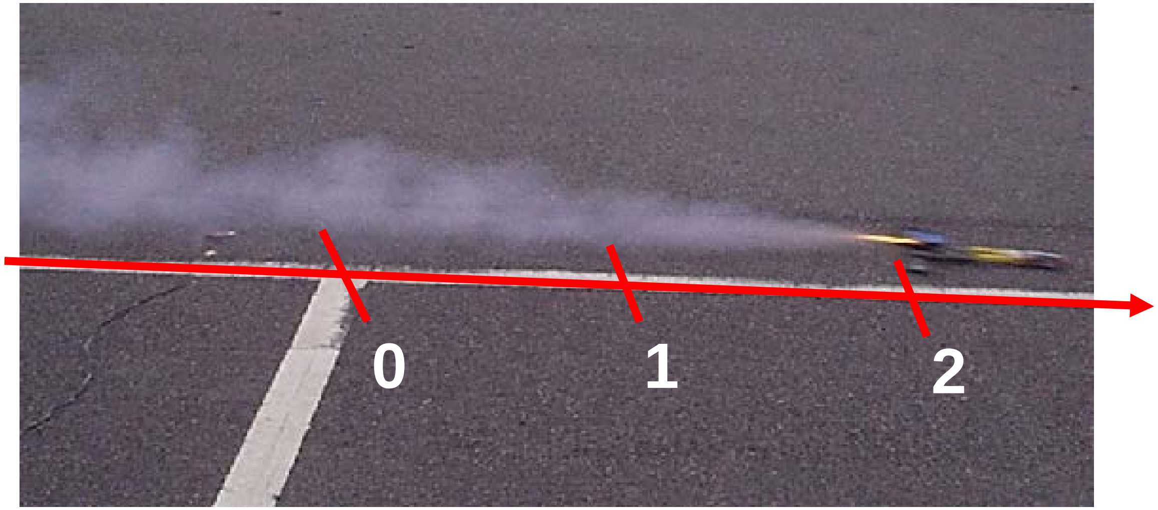
Zustandsraumdarstellung:

$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\mathrm{kg}$)



Modellgleichungen:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$u(t) = m\,a(t) = m\,\dot{x}_2(t)$$

Dann $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$ d.h. $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

Anfangszustand: $x_1(0) = 2;\; x_2(0) = 1$ Sollzustand: $x_1^S = 0;\; x_2^S = 0$

Ziel der Optimalregelung:

- Minimierung der Abweichungen: $x_1^S - x_1(t);\quad x_2^S - x_2(t)$
- Minimierung der Antriebskraft: $u(t)$

Quadratische Funktion als Regelgüte:

Die Aufgabe der Regelung ist die **Minimierung der Abweichung** zwischen dem Sollwert x^S und dem Istwert $x(t)$ in einem betrachteten Zeithorizont $t \in [t_0, t_f]$:

$$\min_{u(t)} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} e^2(t)dt \qquad \text{mit} \qquad e(t) = x^S - x(t)$$

Durch eine Verschiebung kann man den Sollwert mit Null festsetzen:

$$x^S \equiv 0 \qquad \text{damit} \qquad \min_{u(t)} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt$$

Für Systeme mit mehreren Zustandsvariablen bedeutet das:

$$\boxed{\min_{\mathbf{u}} J_1 = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} q_i x_i^2(t)dt} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\min_{\mathbf{u}} J_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)dt}$$

Quadratische Funktion als Regelgüte:

Zugleich sollen die Werte bzw. die Änderungen der Stellgrößen (Antriebskraft) minimiert werden, also

$$\min_{\mathbf{u}} J_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u}\, dt$$

Am Ende des Zeithorizontes $t = t_f$ sollen die Zustandsvariablen nach Möglichkeit an ihren Sollwerten (Null) sein:

$$\min_{\mathbf{u}} J_3 = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f)$$

Gesamtziel des Optimalreglers:

$$\min_{\mathbf{u}} \left[J = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt \right]$$

Problemdefinition:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\,\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)]dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

Zustandsgrößen: $\mathbf{x}(t) \subset R^n$ Stellgrößen: $\mathbf{u}(t) \subset R^m$

Bekannt sind:

Matrizen in den Zustandsgleichungen: $\mathbf{A}(t) \subset R^{n\times n}, \mathbf{B}(t) \subset R^{n\times m}$

Anfangszustand: $\mathbf{x}(t_0)$

Vorgegeben sind:

Symmetrische Matrizen in der Zielfunktion: $\mathbf{F} \subset R^{n\times n}, \mathbf{Q}(t) \subset R^{n\times n}$ (positiv semidefinit), $\mathbf{R}(t) \subset R^{m\times m}$ (positiv definit)

Damit ist das Optimierungsproblem konvex !

Wie kann man das Problem lösen?

Beispiel:

$$\min_{\mathbf{x}} \left[f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \right]$$

$$\text{mit} \quad g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2 = 0$$

1. Umformung zu einem unbeschränkten Problem:

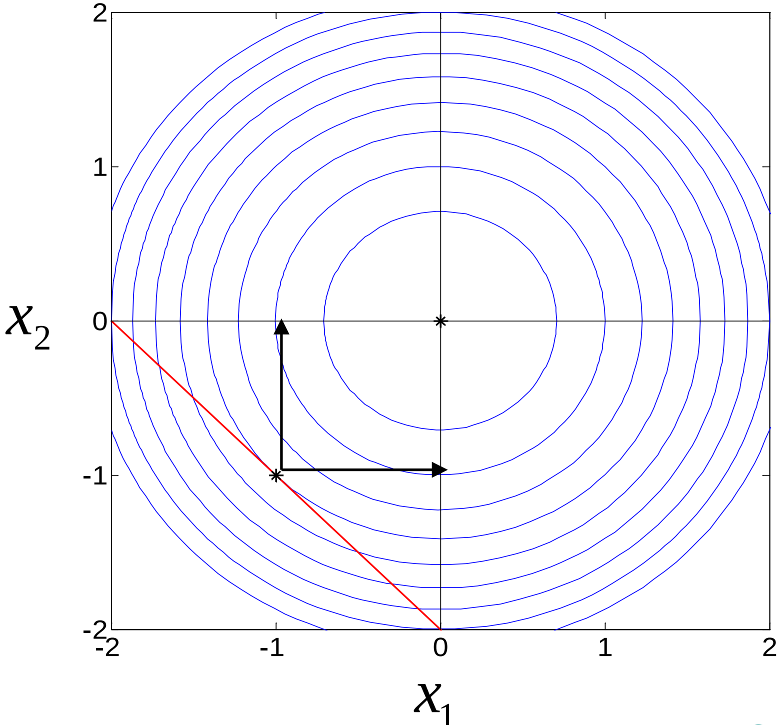
$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda(x_1 + x_2 + 2)$$

2. Die notwendige Optimalitätsbedingung:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$



3. Lösung der Gleichungen:

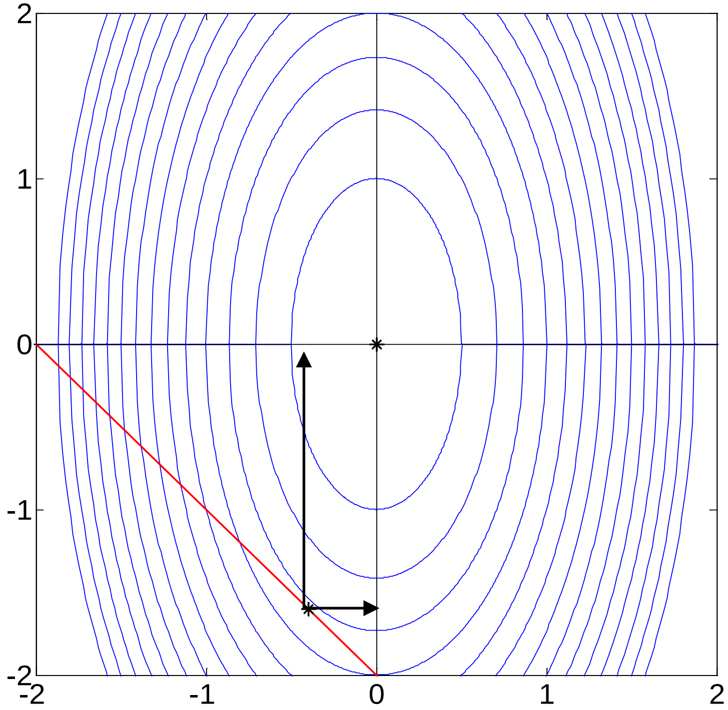
$$x_1^* = x_2^* = -1$$

Achtung: Sollwerte sind: $x_1^S = x_2^S = 0$

Wirkung der Gewichtung:

$$\min_{\mathbf{x}} \left[f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(4x_1^2 + x_2^2\right) \right]$$

mit $\quad g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2 = 0$

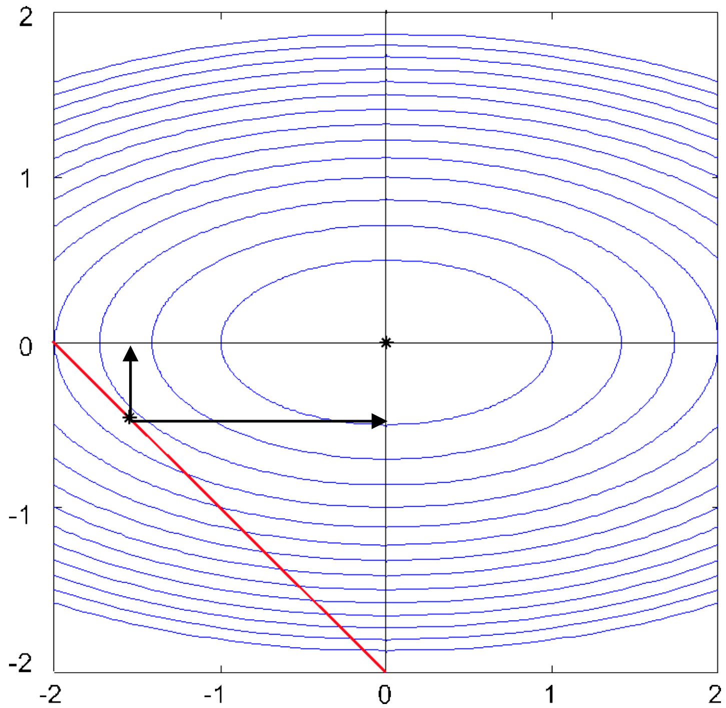


Die Lösung: $x_1^* = -0{,}4; \;\; x_2^* = -1{,}6$

D.h. $\quad x_1^* \rightarrow x_1^S$

$$\min_{\mathbf{x}} \left[f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + 4x_2^2\right) \right]$$

mit $\quad g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2 = 0$



Die Lösung: $x_1^* = -1{,}6; \;\; x_2^* = -0{,}4$

D.h. $\quad x_2^* \rightarrow x_2^S$

Optimalitätsbedingungen dynamischer Systeme:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\,\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)]dt \tag{1}$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

1. Die Hamilton-Funktion:

$$H(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})$$

$\boldsymbol{\lambda}(t)$: adjungierter Zustandsvektor mit n Elementen

2. Es gelten nach dem Hamilton-Verfahren:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} = \mathbf{F}\,\mathbf{x}(t_f) \tag{4}$$

Herleitung der Riccati-Gleichung:

Nach (2): $$\boxed{\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t)}$$

Wie kann man $\boldsymbol{\lambda}(t)$ berechnen?

Es gilt $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^* = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} \tag{5}$$

Nach (3): $$\boxed{\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}}$$

Also $$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}(t)\,\mathbf{z}$$

Für das DGL-System gilt:

$$\mathbf{z}(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathbf{V}(t)dt\right]\mathbf{z}(t_0) = \exp\left[\mathbf{W}(t,t_0)\right]\mathbf{z}(t_0) = \boldsymbol{\Omega}(t,t_0)\,\mathbf{z}(t_0)$$

Herleitung der Riccati-Gleichung:

Es gilt also die **lineare Übertragung**:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Omega}(t,t_0)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Omega}(t_f,t)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} \\ \boldsymbol{\Omega}_{21} & \boldsymbol{\Omega}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (6) \\ (7) \end{matrix}$$

Also

$$\mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\Omega}_{11}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\Omega}_{12}\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{\Omega}_{21}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{9}$$

Setzt man (4) in (9) ein:

$$\mathbf{F}\,\mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\Omega}_{21}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{10}$$

Aus (8):

$$\mathbf{F}\,\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{F}\,\boldsymbol{\Omega}_{11}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\,\boldsymbol{\Omega}_{12}\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{11}$$

Herleitung der Riccati-Gleichung:

(10) - (11): $$[\mathbf{\Omega}_{21} - \mathbf{F}\,\mathbf{\Omega}_{11}]\mathbf{x}(t) + [\mathbf{\Omega}_{22} - \mathbf{F}\,\mathbf{\Omega}_{12}]\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{0}$$

Daher $$\boldsymbol{\lambda}(t) = -[\mathbf{\Omega}_{22} - \mathbf{F}\,\mathbf{\Omega}_{12}]^{-1}[\mathbf{\Omega}_{21} - \mathbf{F}\,\mathbf{\Omega}_{11}]\,\mathbf{x}(t)$$

Also $$\boxed{\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x}(t)}$$ $\mathbf{P}(t):\ n \times n$ Matrix (12)

Damit ist $\boldsymbol{\lambda}(t)$ mit $\mathbf{x}(t)$ verbunden.

Daher nach (2): $$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$ (13)

Wie kann man $\mathbf{P}(t)$ berechnen?

Herleitung der Riccati-Gleichung:

Aus (12): $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = [\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)]' = \dot{\mathbf{P}}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\,\dot{\mathbf{x}}(t)$

Nach (5): $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$

Daher $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\,[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t)$

Also $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = [\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t)$ (14)

Nach (3): $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = -[\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t)$ (15)

Aus (14) und (15) folgt die **dynamische Riccati-Gleichung**:

$$\boxed{-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)} \qquad (16)$$

prop Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimal-Regler zeitvarianter Systeme:

Das nichtlineare DGL-System ist zu lösen!

Nach (4) $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{F}\,\mathbf{x}(t_f)$

und (12) $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{P}(t_f)\,\mathbf{x}(t_f)$

$\longrightarrow$ **Die Randbedingung:**

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}$$

Eigenschaften der Riccati-Matrix $\mathbf{P}(t)$:

1) Symmetrisch: $\mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}(t)$, d.h. es gibt $n(n+1)/2$ Gleichungen.
2) Positiv definit, wenn $\mathbf{F}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ positiv definit sind.

Es folgt die Regelung durch Zustandsrückführung:

Nach (2): $$\boxed{\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)} \qquad (17)$$

Daher $$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}^*(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t)$$

Optimal-Regler zeitinvarianter Systeme:

Wenn $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ konstante Matrizen sind,

und wenn ein infiniter Zeitbereich betrachtet wird

also $\quad t_f \to \infty \qquad \mathbf{x}(t_f) \to \mathbf{0}$

wird das Optimalregelungsproblem:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Dann ergibt sich die stationäre Riccati-Gleichung:

$$\boxed{\mathbf{0} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}} \tag{18}$$

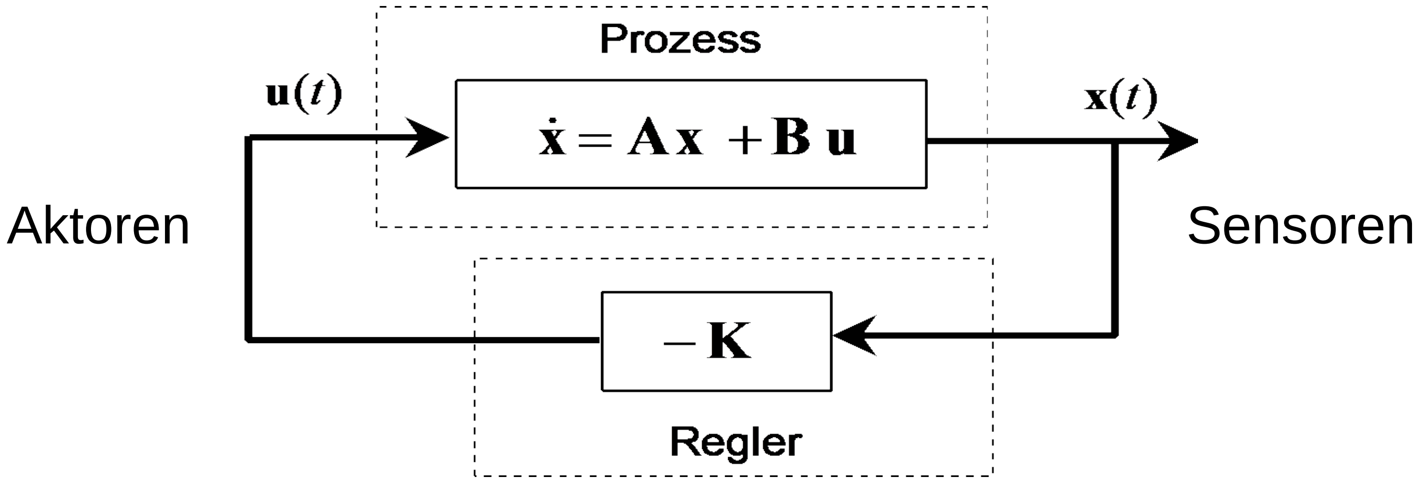
Das nichtlineare Gleichungssystem ist zu lösen!

Implementierung des Optimal-Reglers:

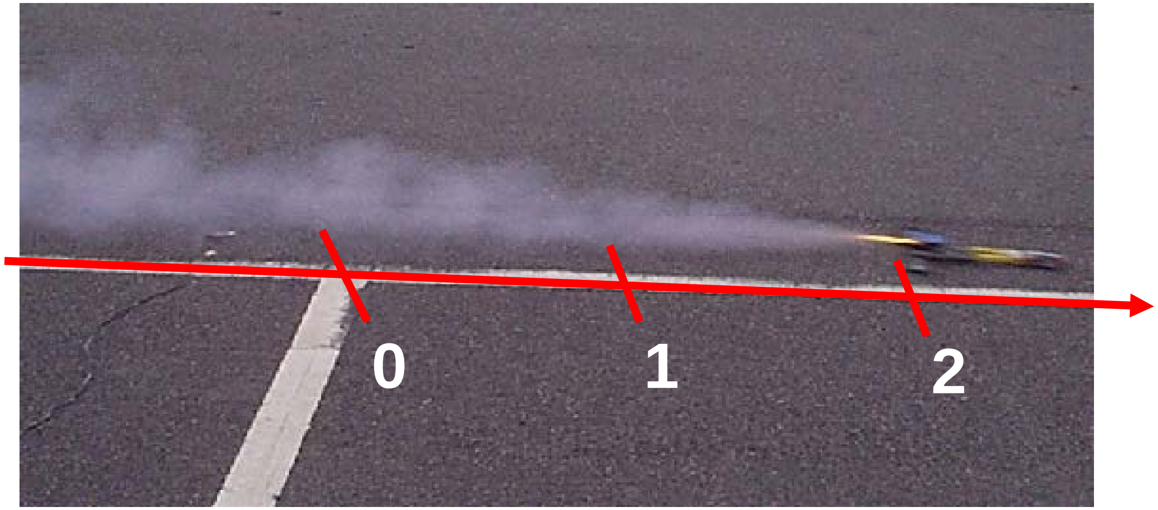
Und nun $$\boxed{\mathbf{u}^*(t) = -\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}\,\mathbf{x}(t)} \qquad (20)$$

Eigenschaften dieses Optimalreglers:

- Asymptotisch stabil, d.h. $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, wenn das System $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ vollständig steuerbar ist.
- Das Regelungssystem ist einfach zu implementieren.



Optimalregelung des Raketenwagens:



$x_1(t)$: Position

$x_2(t)$: Geschwindigkeit

$u(t)$: Antriebskraft

m : Masse ($m = 1\,\mathrm{kg}$)

Weil $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$ dann

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Anfangszustand: $x_1(0) = 2; \quad x_2(0) = 1$

Sollzustand: $x_1^S = 0; \quad x_2^S = 0$

Gütefunktional:

$$\min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \left[x_1^S - x_1(t)\right]^2 + 2\left[x_2^S - x_2(t)\right]^2 + \left[u(t)\right]^2 \right\} dt$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimalregelung des Raketenwagens:

Das Optimalregelungsproblem:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

wobei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

Die Riccati-Gleichung: $\mathbf{0} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$

Also

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Optimalregelung des Raketenwagens:

Die Lösung:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Damit

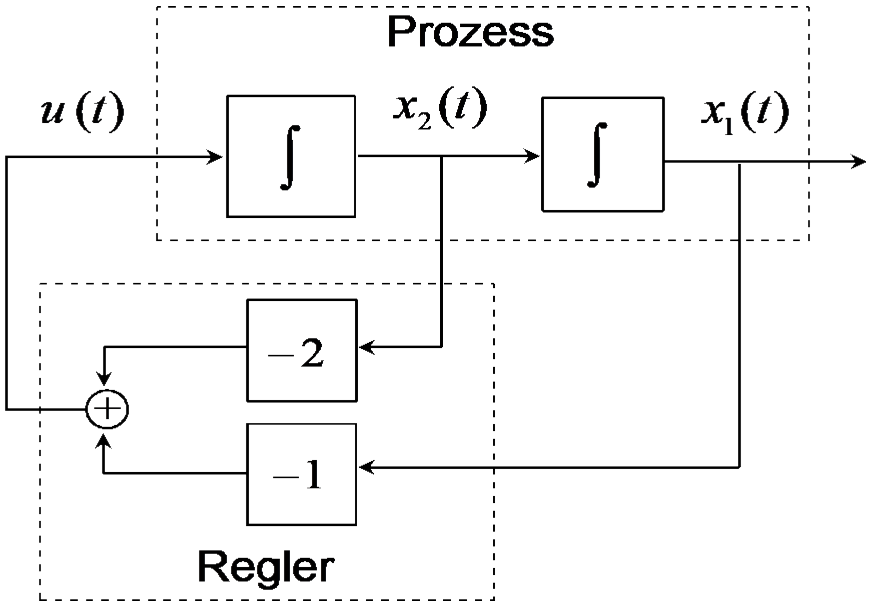
$$u^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\,\mathbf{x}(t) = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1(t) - 2x_2(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2(t) = u^*(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) \qquad x_2(0) = 1$$

Implementierung:

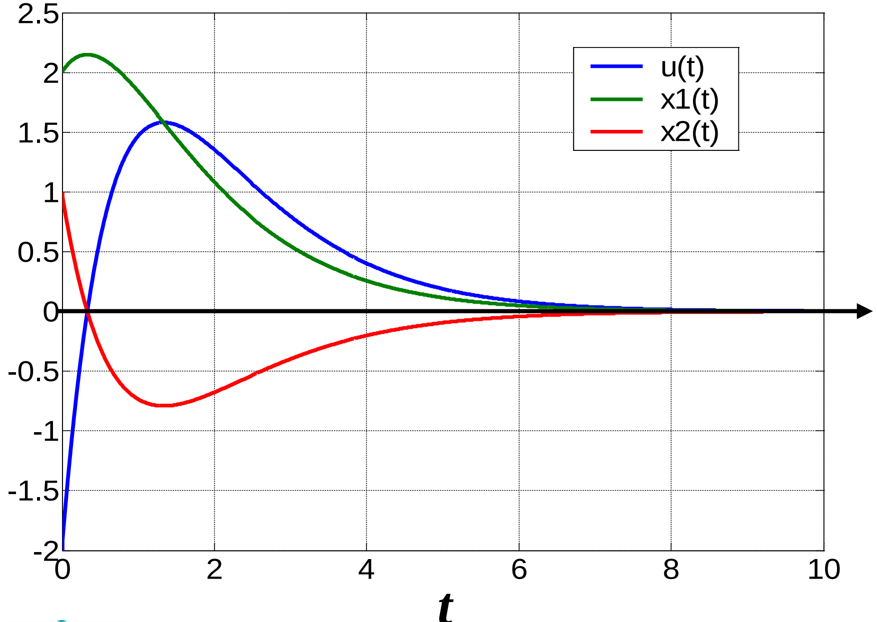
Simulation mit MATLAB



Ergebnisse der Optimalregelung:

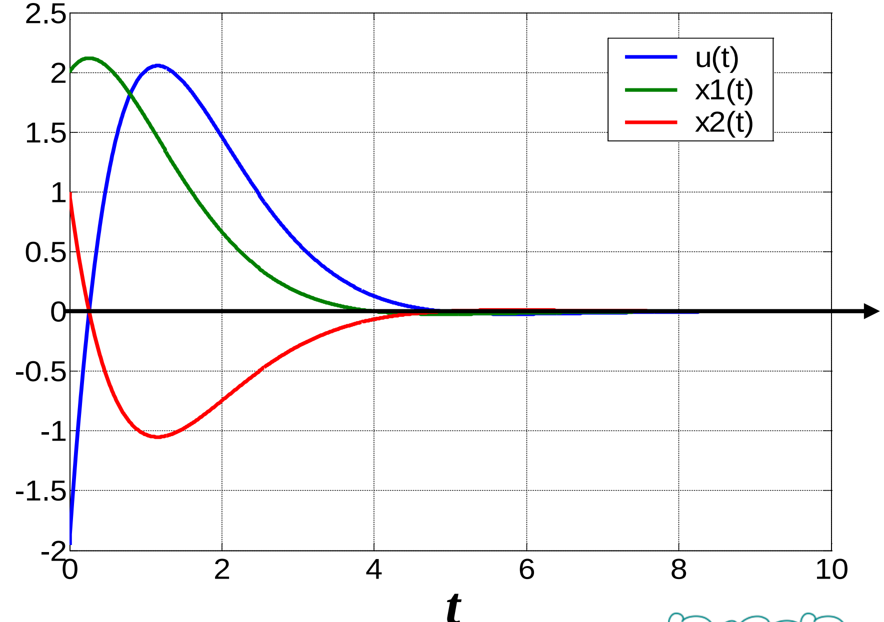
Fall 1: größere Gewichtung auf der Geschwindigkeit

$$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ \left[x_1^S - x_1(t)\right]^2 + \boxed{2\left[x_2^S - x_2(t)\right]^2} + \left[u(t)\right]^2 \right\} dt$$



Fall 2: größere Gewichtung auf der Position

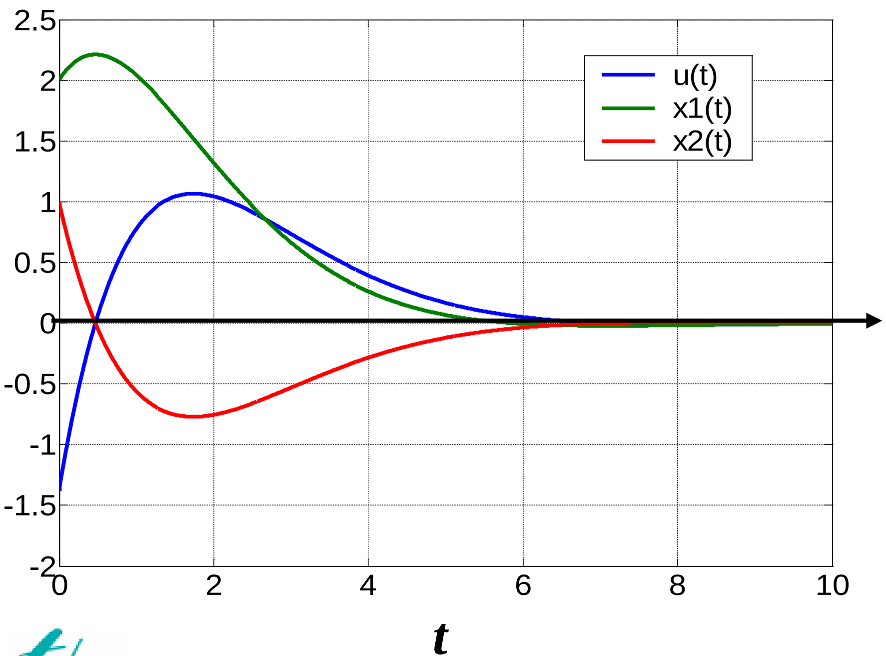
$$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ \boxed{2\left[x_1^S - x_1(t)\right]^2} + \left[x_2^S - x_2(t)\right]^2 + \left[u(t)\right]^2 \right\} dt$$



Ergebnisse der Optimalregelung:

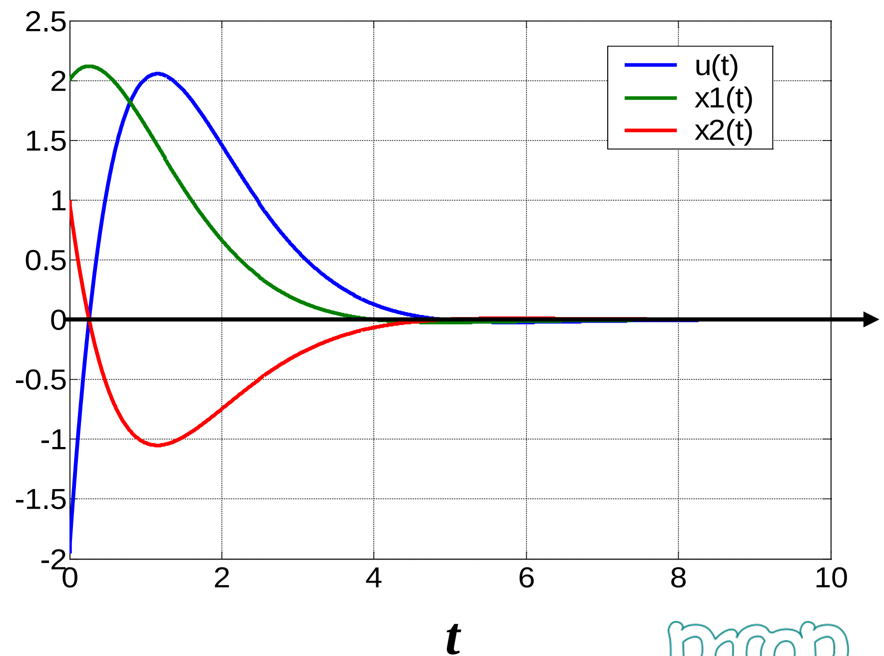
Fall 3: größere Gewichtung auf der Antriebskraft

$$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\left[x_1^S - x_1(t)\right]^2 + \left[x_2^S - x_2(t)\right]^2 + \boxed{2\left[u(t)\right]^2}\right\}dt$$



Fall 2: größere Gewichtung auf der Position

$$\min_{u(t)} \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\boxed{2\left[x_1^S - x_1(t)\right]^2} + \left[x_2^S - x_2(t)\right]^2 + \left[u(t)\right]^2\right\}dt$$



Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimaler Zielfunktionalwert:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left[J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\,\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt \right]$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Bei der Lösung:

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \longrightarrow -\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \dot{\mathbf{P}}$$

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = -\mathbf{R}\mathbf{u}^*$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}\right)^*}{dt} &= \left(\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x}\right)^* + \left(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}\right)^* + \left(\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x}\right)^* \\
&= \left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\right)^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\right) + \left(\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x}\right) \\
&= \left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T\right)\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\left(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x}\right) \\
&= \mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} + \dot{\mathbf{P}}\right)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \\
&= -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}
\end{aligned}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Optimaler Zielfunktionalwert:

Es folgt: $$d(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = -\left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

Integration: $$-\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_f} d(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

$$-\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

Also $$\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

Weil $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}$

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

Das Minimum des Zielfunktionals:

$$\boxed{J^* = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0)}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Die Riccati-Matrix ist positiv definit:

Integration:

$$-\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}_f} d(\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) = \int_t^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

$$-\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = \int_t^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

Also

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}(t_f) + \int_t^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt$$

Weil $\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ positiv definit sind, muss

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \geq 0$$

Daher ist $\mathbf{P}(t)$ positiv definit.

Asymptotische Stabilität:

Wenn das System vollständig steuerbar ist, ist durch die Zustandsrück-führung mit dem Riccati-Regler der optimale Zielfunktionalwert beschränkt:

$$\min_{\mathbf{u}}\left[\frac{1}{2}\int_0^\infty(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt\right] < \infty$$

Dann muss $\int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}dt < \infty \;\Rightarrow\; \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}dt < \infty \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^n\int_0^\infty x_i^2(t)dt < \infty$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x_i^2(t)dt < \infty,\, i = 1,\cdots,n \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} x_i^2(t) = 0, \quad i = 1,\cdots,n$$

Wenn das nicht der Fall ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ und $t_e > 0$, bei $t \geq t_e$

$$x_i^2(t) \geq \varepsilon$$

Integration von 0 bis *t* für beide Seiten: $\int_0^t x_i^2(t)dt \geq \varepsilon\, t$

D.h. $\int_0^\infty x_i^2(t)dt = \infty$

Widerspruch zur obigen Annahme, d.h. es muss $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$ sein.

Eigenschaft der Übertragungsmatrix:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

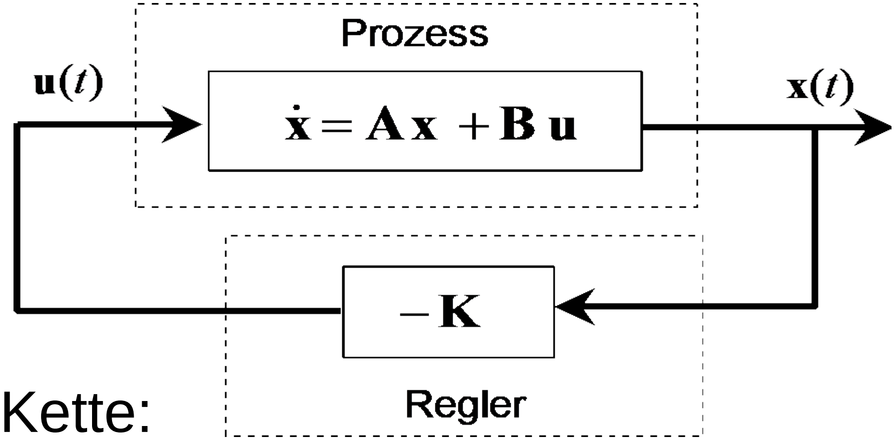
$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Daher

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(s)\mathbf{U}(s)$$



Die Übertragungsmatrix der offenen Kette:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}\,\mathbf{x}(t)$$

Dann

$$\mathbf{U}(s) = -\mathbf{K}\,\mathbf{X}(s) = -\mathbf{K}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Die offene Kette: $\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{K}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

Die charakteristische Matrix:

$$\mathbf{G}_{Ch}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s) = \mathbf{I} + \mathbf{K}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Eigenschaft der Übertragungsmatrix:

Riccati-Gleichung: $$\mathbf{0} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

$$-\mathbf{P}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow \quad s\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathbf{A} - s\mathbf{P} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + (\mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1})\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow \quad (s\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathbf{A}) + (-s\mathbf{P} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}) + (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T\mathbf{R}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) + (-s\mathbf{I} - \mathbf{A})^T\mathbf{P} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} = \mathbf{Q}$$

Multipliziert man von links $\mathbf{B}^T(-s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}$ **und von rechts** $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}^T(-s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T(-s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$$= \mathbf{B}^T(-s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{Q}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

da $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^T\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{K}$

Eigenschaft der Übertragungsmatrix:

Die offene Kette: $\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

Es folgt:

$$\mathbf{G}_0(-s)^T\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{G}_0(s) + \mathbf{G}_0(-s)^T\mathbf{R}\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{B}^T(-s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Q}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Also $\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(-s)^T\right)\mathbf{R}\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(s)\right) = \mathbf{R} + \mathbf{G}_\mathbf{x}(-s)^T\mathbf{Q}\mathbf{G}_\mathbf{x}(s)$

$$\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(-j\omega)^T\right)\mathbf{R}\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(j\omega)\right) = \mathbf{R} + \mathbf{G}_\mathbf{x}(-j\omega)^T\mathbf{Q}\mathbf{G}_\mathbf{x}(j\omega)$$

Für eine Matrix $\mathrm{M}(j\omega)$ gibt es $\left|\det\left[\mathbf{M}(-j\omega)^T\right]\right| = \left|\det\left[\mathbf{M}(j\omega)\right]\right|$

dann

$$\left|\det\left[\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(-j\omega)^T\right)\mathbf{R}\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(j\omega)\right)\right]\right| = \left|\det\left[\mathbf{R} + \mathbf{G}_\mathbf{x}(-j\omega)^T\mathbf{Q}\mathbf{G}_\mathbf{x}(j\omega)\right]\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left(\det\left[\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(j\omega)\right]\right)^2\left|\det\left(\mathbf{R}\right)\right| \geq \left|\det\left(\mathbf{R}\right)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\det\left[\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(j\omega)\right]\right| \geq 1$$

Eigenschaft der Übertragungsmatrix:

$$\left|\det\left[\mathbf{I}+\mathbf{G}_0(j\omega)\right]\right| \geq 1$$

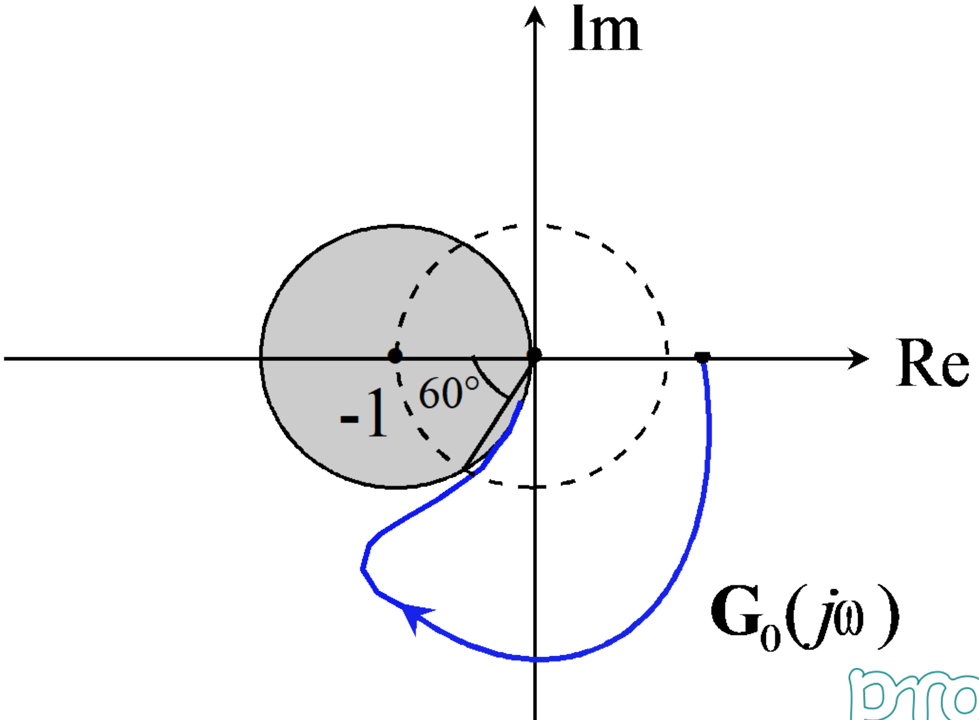
Das geschlossene System ist stabil.

Grasfische Darstellung:

$$\left|1+G_0(j\omega)\right| \geq 1$$

$$\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad \left|G_0(j\omega)\right| \to 0$$

Die Phasenreserve ist
großer als 60°.



Fachgebiet
Prozessoptimierung

Entwurf eines Riccati-Optimal-Reglers:

Schritt 1: Modellierung mit der Zustandsraumdarstellung

Schritt 2: Analyse der Steuerbarkeit des Systems

Schritt 3: Definition des Gütefunktionals und Auswahl der Gewichtungsmatrix

Schritt 4: Lösung der Riccati-Gleichung und Ermittlung der Rückführungsmatrix

Schritt 5: Offline-Simulation und danach Online-Implementierung

Weitere Schwerpunkte beim Entwurf:

- **Entwurf eines geeigneten Zustandsbeobachters**
- **Beseitigung der bleibenden Regelabweichung durch Einsatz von Integratoren**
- **Platzierung der Polstellen des geschlossenen Systems**

Riccati-Optimal-Ausgangsregler:

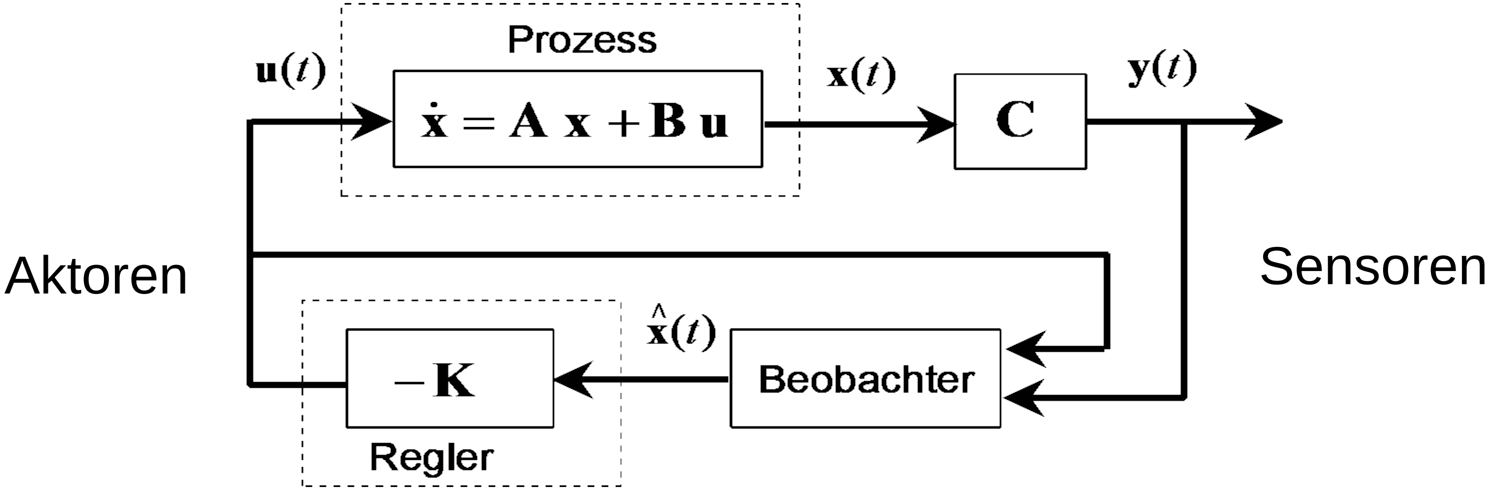
Wenn nicht alle Zustandsvariablen messbar sind ($\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)$),
lautet das Optimalregelungsproblem:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})\,dt \qquad \longrightarrow \qquad \min_{\mathbf{u}(t)} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\mathbf{x}^T\left(\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}\right)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right]dt$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad\qquad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

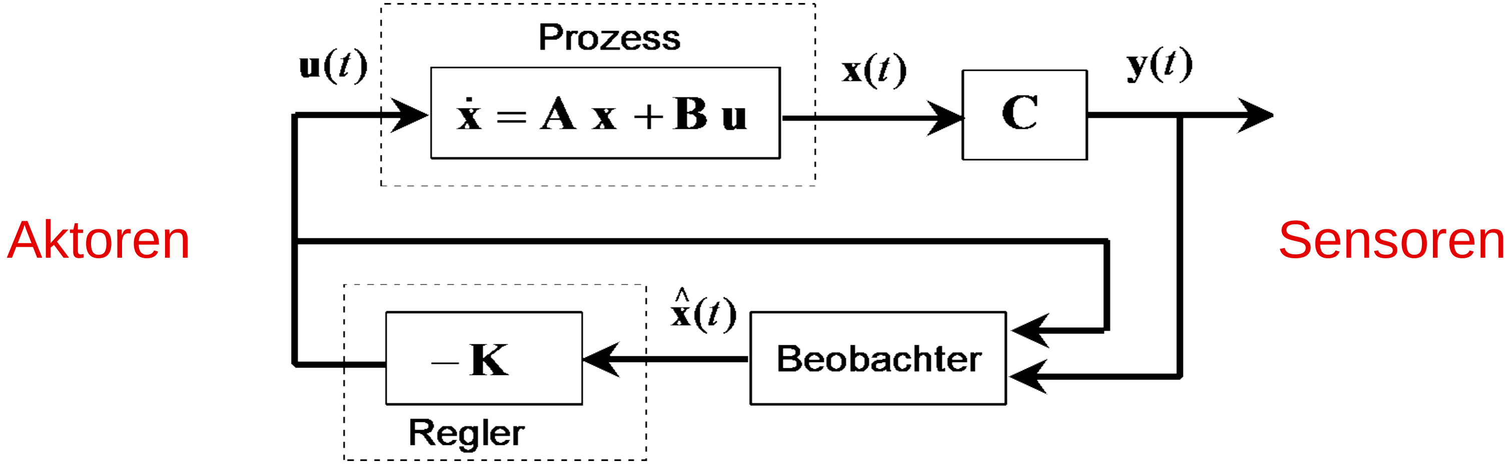
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}$$

- Ein Zustandsbeobachter wird benötigt.
- Das System $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ muss vollständig beobachtbar sein.



Entwurf eines Beobachters

Implementierung Zustandsrückführung:



Tatsächliche Werte: $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ Beobachtete Werte: $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}}$

Fehler der Beobachtung: $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$

Da $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

Eine $n \times l$-Matrix $\mathbf{L}$ wird eingeführt, damit

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Entwurf eines Beobachters

Fehler der Zustandsschätzung:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{LC}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})]$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}$$

Die Lösung: $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \exp[(\mathbf{A} - \mathbf{LC})t]\,\tilde{\mathbf{x}}(0)$

Matrix $\mathbf{L}$ wird ausgelegt, damit $\lim_{t \to \infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$

Häufig wird die Matrix $\mathbf{L}$ so ausgelegt, dass die gewünschten Postellen des Beobachters realisiert werden.

Die charakteristische Gleichung:

$$f(s) = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}]$$

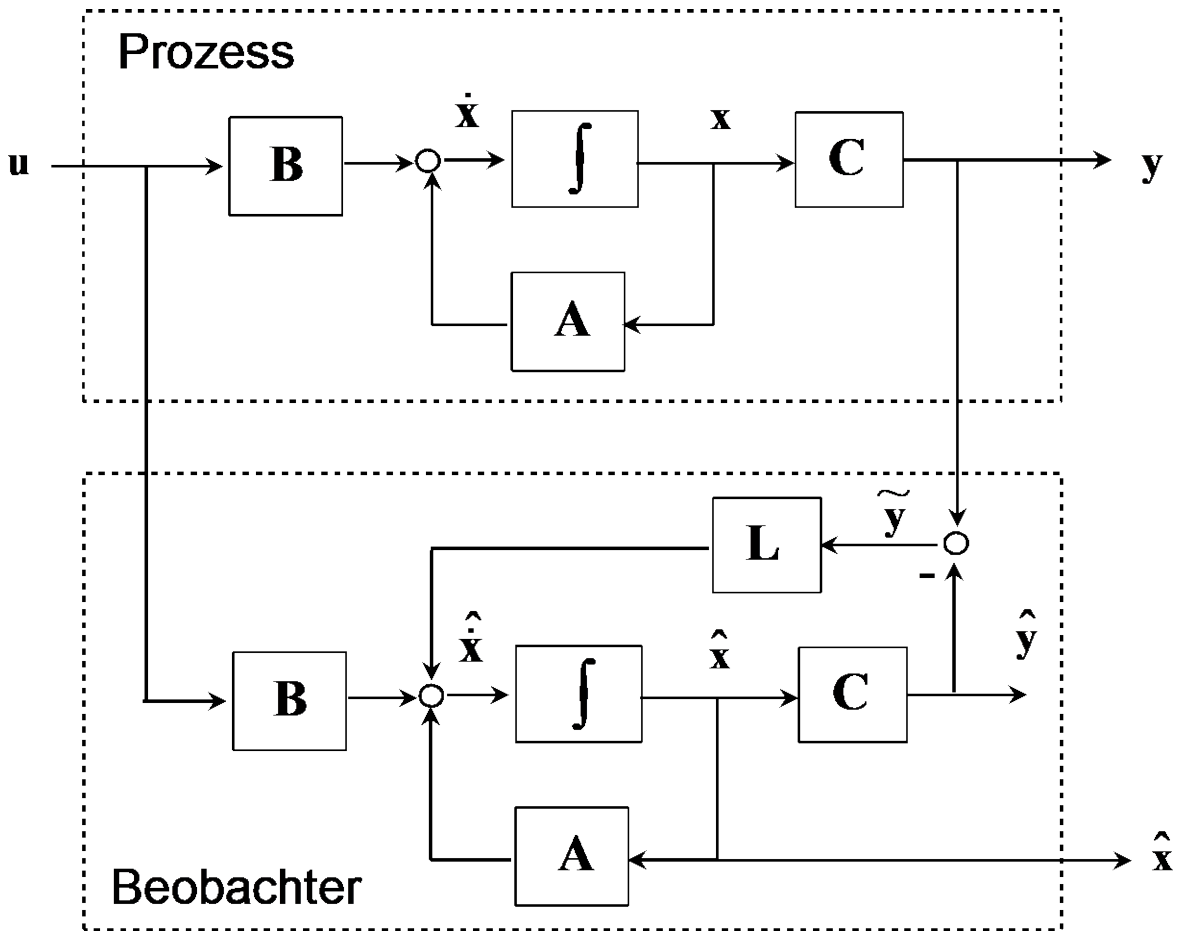
Die gewünschten Polstellen: $s_1, s_2, \cdots, s_n$

$$f(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n)$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Entwurf eines Beobachters

Implementierung: $$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$



Voraussetzung: das System muss beobachtbar sein.

Entwurf eines Beobachters

Beispiel:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die gewünschten Polstellen: -3, -4, -5.

Die Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad Rang\left[\mathbf{Q}_B\right] = 3$$

Aufgrund der gewünschten Polstellen:

$$f(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Entwurf eines Beobachters

Angenommen $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}^T$, dann ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$f(s) = \det\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)\right] = \det\left[\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 & l_1 & 0 \\ l_2 & l_2 & 0 \\ l_3 & l_3 & 0 \end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} s-1+l_1 & l_1 & 0 \\ l_2 & s-2+l_2 & -1 \\ l_3 & l_3 & s-2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= (s-1+l_1)(s-2+l_2)(s-2) - l_1 l_3 + (s-1+l_1)l_3 - (s-2)l_1 l_2$$

$$= s^3 + (-2-2+l_2-1+l_1)s^2 + \left[(-2+l_2)(-2) + (-1+l_1)(-2) + (-2+l_2)(-1+l_1) + l_3 - l_1 l_2\right]s$$

$$+ (-2+l_2)(-1+l_1)(-2) - l_1 l_3 + (-1+l_1)l_3 + 2l_1 l_2$$

$$= s^3 + (l_1 + l_2 - 5)s^2 + (-4l_1 - 3l_2 + l_3 + 8)s + (4l_1 + 2l_2 - l_3 - 4)$$

Vergleicht man diese mit

$$f(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

folgt

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 120 & -103 & 210 \end{bmatrix}^T$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Einsatz von Integratoren:

Systeme mit Störungen: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Sollwerte der Ausgangsvariablen $\mathbf{y}^S$ und der Fehler $\mathbf{e} = \mathbf{y}^S - \mathbf{y}$

Einführung neuer Zustandsvariablen:

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t \mathbf{e}(t)dt = \int_0^t \left[\mathbf{y}^S(t) - \mathbf{y}(t)\right]dt$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{y}^S(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^S(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Das Optimalregelungsproblem:

$$\min_{\mathbf{u}} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\begin{pmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{z}^T \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \right] dt$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{y}^S \end{pmatrix}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

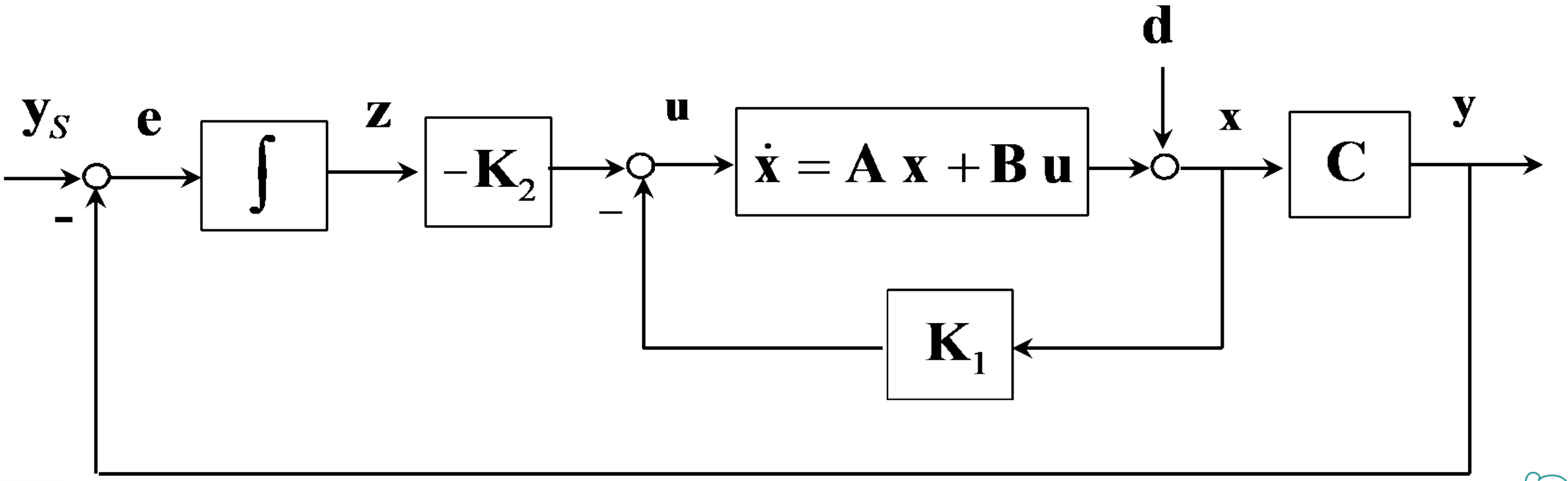
Einsatz von Integratoren:

Die Lösung des Problems: $$\mathbf{u}^* = -\mathbf{K}_1\mathbf{x} - \mathbf{K}_2\mathbf{z}$$

Asymptotische Stabilität: $$\lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathbf{e}(t)dt = \mathbf{0}$$

Daher $$\lim_{t\to\infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$$

Die Implementierung:



Anwendungsbereiche:

- Quadratisches Funktional als Regelgüte
- Lineare Mehrgrößensysteme
- Nichtlineare Systeme mit kleinen Störungen

Anforderungen:

- Vollständig steuerbare Systeme
- Vollständig beobachtbare Zustandsvariablen
- Unbeschränkte Stell- und Zustandsvariablen

Herausforderungen:

- Große nichtlineare Systeme mit Beschränkungen
- Zustandsschätzung und Parameteridentifikation
- Systeme unter Unsicherheiten

Anwendungsgebiete:

Chemieindustrie

Industrieroboter

Luft- und Raumfahrtindustrie

Automobilindustrie