Fachgebiet
Prozessoptimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Fakultät für Informatik und
Automatisierung
Institut für Automatisierungs-
und Systemtechnik

Übungsaufgabensammlung zum Modul

„Dynamische Prozessoptimierung“

1 Umsteuerung eines Fahrzeuges

Formulieren und lösen Sie (analytisch nach dem Hamilton-Verfahren) die optimale Umsteuerungsaufgabe eines Fahrzeuges, dessen vereinfachte, dynamische Systembeschreibung wie folgt lautet:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= u(t)\,, \qquad u(t) = a(t) = \frac{1}{m}F(t)
\end{aligned}
$$

mit $x_1(t)$ - Position, $x_2(t)$ - Geschwindigkeit, $u(t) = a(t)$ - Beschleunigung,
$m = 1$ - Masse, $a(t)$ - Beschleunigung, $F(t)$ - Antriebskraft.
Das Fahrzeug soll aus dem Ruhezustand (Position $x_1(t_0) = 0$) in die Endposition $x_1(t_f) = 1$ energieoptimal umgesteuert werden und dort zur Ruhe kommen. Die Umsteuerung soll im Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_f$ mit $t_0 = 0$ und $t_f = 1$ stattfinden.

a) Welche Bestandteile beinhaltet das dynamische Optimierungsproblem? Klassifizieren Sie diese Optimalsteuerungsaufgabe!
b) Welche Schritte sind bei der Lösung nach dem Hamilton-Verfahren auszuführen?
c) Ermitteln Sie die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionalwert!

2 Dynamische Optimierung eines Systems 1. Ordnung

Gegeben sei ein System, das durch Verzögerungsverhalten erster Ordnung (Verstärkung $K = 1$ und Zeitkonstante $T_1 = 1$) gekennzeichnet ist. Das System befinde sich zu Beginn der Betrachtungen in Ruhe. Der Zeithorizont ist folgendermaßen definiert: $t_0 \leq t \leq t_f$ mit $t_0 = 0$ und $t_f = 1$. Das Ziel der Steuerungsaufgabe besteht in der Erreichung eines möglichst hohen Endzustandswertes bei gleichzeitig geringst möglichem Steueraufwand.

a) Stellen sie die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung auf!

b) Formulieren Sie ein entsprechendes Gütefunktional und klassifizieren Sie das entstandene dynamische Optimierungsproblem!
c) Zeigen Sie am vorliegenden Beispiel, dass ein Bolza-Funktional in ein Lagrangefunktional (und umgekehrt) überführbar ist.
d) Lösen Sie das Optimierungsproblem unter Nutzung des Hamilton-Verfahrens auf rechnerischem (analytischem) Wege!

3 Zeitoptimale Steuerung

Berechnen Sie die zeitoptimale Umsteuerung eines Systems 2. Ordnung (eines Doppelintegrators)!

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
\boldsymbol{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \ \boldsymbol{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
-M &= u_{min} = \leq u(t) \leq u_{max} = M
\end{aligned}$$

4 Dynamische Optimierung eines linearen Systems mit quadratischem Gütemaß

Überführen Sie ein aus dem Arbeitspunkt (AP) ausgelenktes System in den Arbeitspunkt und berechnen Sie dazu die optimale Steuerung!

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= a\,x(t) + b\,u(t)\,, \quad x(0) = x_0 = 1, \quad \text{AP: } x_{AP} = 0 \\
& \text{mit } a = \frac{-1}{T_1}, \ b = \frac{K_P}{T_1}, K_P = 1, T_1 = 1 \\
J(x,u) &= \frac{1}{2}\bar{q}\,x^2(t_f) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_f} \left(q\,x^2 + r\,u^2\right) dt \quad \text{mit } \bar{q} = 1,\ q = 0,\ r = 0.25 \\
& \min_{u(t)} J(x,u)
\end{aligned}$$

5 Optimierungsaufgabe mit beschränkter Steuerung

Ermitteln Sie die optimale Steuerung für den energieoptimalen Umsteuerungsvorgang eines Doppelintegrators, wenn die Steuerung beschränkt ist!

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
\boldsymbol{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \ \boldsymbol{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
-M &= u_{min} = \leq u(t) \leq u_{max} = M
\end{aligned}$$

a) Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen auf!
b) Ermitteln Sie das Steuergesetz!
c) Skizzieren und diskutieren Sie die Lösung qualitativ für den Fall, dass die Steuerung unbeschränkt bzw. beschränkt ist!

6 Verbrauchsoptimale Steuerung bei Steuerbeschränkung

Berechnen Sie die verbrauchsoptimale Steuerung zur Bahnkorrektur eines Flugkörpers (siehe Abb. 6 nach [3]) bei entsprechender Systembeschreibung (siehe unten)! Welche weiteren Bedingungen müssen zur Lösung herangezogen werden?

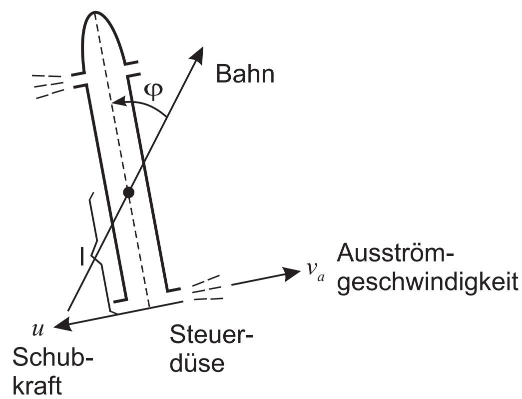

Abbildung 1: Drehmanöver eines Raumflugkörpers (Abb. nach [3])

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -V \end{bmatrix} u(t) \\
\boldsymbol{x}(0) &= \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-M &= u_{min} = \leq u(t) \leq u_{max} = M \quad \text{bzw. } |u(t)| \leq M \\
\text{mit } x_1(t) &= \varphi(t) \; - \text{ Drehwinkel zur Flugbahn} \\
x_2(t) &= \dot{\varphi}(t) \; - \text{ Winkelgeschwindigkeit} \\
V &= \frac{l}{\Theta}, \qquad l \text{ - Kraftarmlänge des Schubs, } \Theta \text{ - Trägheitsmoment}
\end{aligned}
$$

7 Numerische Lösung von Optimalsteuerungsproblemen

7.1 Umsteuerung eines Systems in den Arbeitspunkt bei Zustands- und Endzeitbewertung sowie beschränkter Steuerung

Bereiten Sie die numerische Lösung des Optimalsteuerungsproblems mittels Kollokationsverfahren vor! Nutzen Sie MATLAB® [1] und SNOPT (`https://ccom.ucsd.edu/~optimizers/downloads/index.php`, Lösungsverfahren für große, schwach besetzte Gleichungssysteme)!

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= u(t) \\
\boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_{t_f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t_f \text{ frei} \\
|u(t)| &\le u_{minmax}, \quad u_{minmax} = 1 \\
\min_u J &= \min_u \left\{ \rho_{t_f} t_f + \frac{1}{2} \int_o^{t_f} \left(x_1^2 + x_2^2 \right) dt \right\}, \quad \rho_{t_f} = 0.1
\end{aligned}
$$

7.2 Numerische Lösung der Aufgabe 5

Bereiten Sie die numerische Lösung des Optimalsteuerungsproblems aus Aufgabe 5 mittels Kollokationsverfahren vor! Greifen Sie auf MATLAB® und die Funktion `bvp4c` zur Lösung einer Mehrpunktrandwertaufgabe zurück! Berechnen Sie die Lösung für unterschiedliche Werte der Steuerungsbeschränkung $M = \{5, 4.5, 4.25, 4\}$!

8 Dynamische Programmierung

Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mittels Dynamischer Programmierung!

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3} \left(x(k)^2 + u(k)^2 \right)$$

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = 1, \; x(4) = 0$$

$$0.6 - 0.2\,k \le x(k) \le 1$$

Literatur

[1] E. Arnold. Optimale Steuerung 2: Numerische Verfahren und Beispiele. Skript, TU Ilmenau, 2005.

[2] M. Athans and P. L. Falb. *Optimal Control*. McGraw-Hill, 1966.

[3] O. Föllinger. *Optimale Regelung und Steuerung*. Oldenbourg, 1994.

[4] P. Li. Dynamische Prozessoptimierung. Vorlesungsskript. http://www.tu-ilmenau.de/simulation.

[5] M. Papageorgiou. *Optimierung*. Oldenbourg, 1996.

[1] MATLAB® ist ein eingetragenes Warenzeichen der The MathWorks Inc.