Regelungs- und Systemtechnik 1

Kapitel 2: Modellierung linearer Prozesse

Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Problemdarstellung

Wie reagiert die Ausgangsgröße, wenn die Eingangsgröße sich verändert?

- **Lösung durch Versuche (Experiment)**
- **Lösung durch Modellierung, Analyse und Simulation**

Vorgehensweise:

- **Modellierung (mathematische Beschreibung)**
  Physik, Chemie, Elektrotechnik, Mechanik, ...
- **Analyse (Charakterisierung)**
  Mathematik, Signalverarbeitung, ...
- **Simulation (Lösung der Modellgleichung)**
  Numerik, Software, ...

Modellierung mittels Bilanzierung

Bilanzierung:

- Stoffbilanz
- Energiebilanz
- Spannungsbilanz
- Strombilanz

... ...

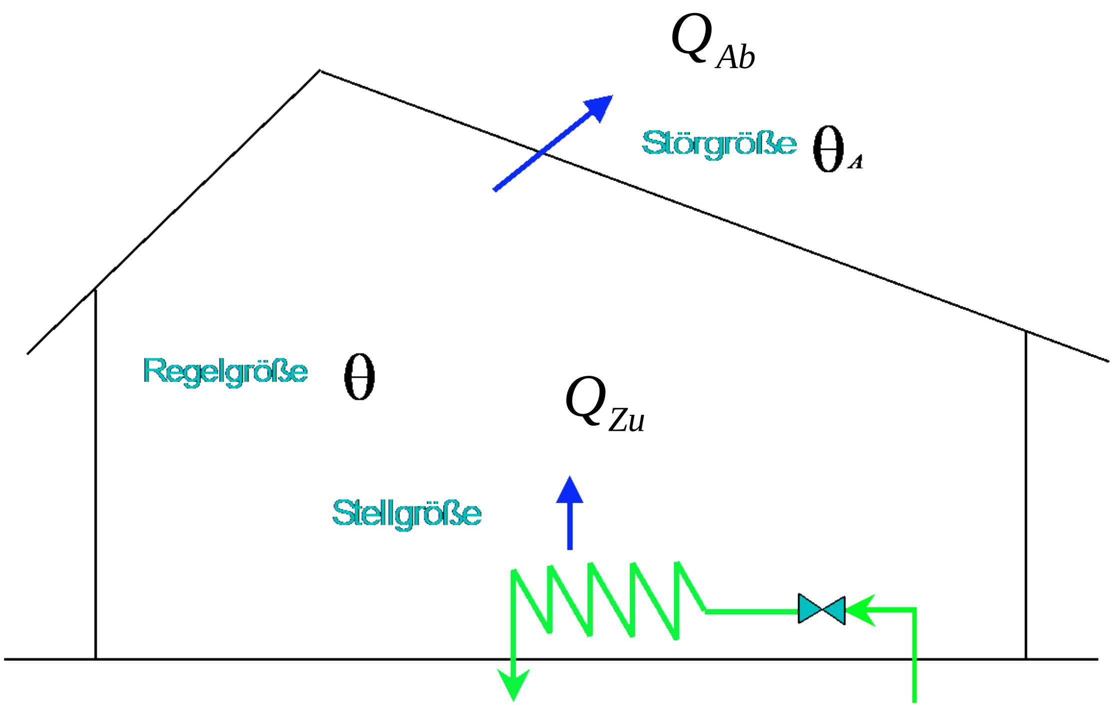
Bilanzgleichung:

Zufuhr (/s) – Abfuhr (/s) = Speicherung (/s)

- Wenn Zufuhr = Abfuhr, ist der Prozess stationär (Algebraische Gleichung).
- Wenn Zufuhr ≠ Abfuhr, ist der Prozess dynamisch (Differentialgleichung).
- Die Gleichung kann linear oder nichtlinear sein.

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Beschreibung des Prozesses:



Wärmeabfuhr:

$$Q_{Ab} = \overline{U}\,A(\theta - \theta_A)$$

Wärmezufuhr:

$$Q_{Zu}$$

Energiebilanz:

$$\frac{dH}{dt} = Q_{Zu} - Q_{Ab}$$

mit $$H = m\overline{C}_P\theta$$

Also

$$m\overline{C}_P\frac{d\theta}{dt} = Q_{Zu} - \overline{U}\,A(\theta - \theta_A)$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Beschreibung des Prozesses:

$$m\overline{C}_P \frac{d\theta}{dt} = Q_{Zu} - \overline{U}\,A(\theta - \theta_A)$$

Definition:

$$T = \frac{m\overline{C}_P}{\overline{U}\,A}, \quad k_u = \frac{1}{\overline{U}\,A}, \quad k_z = 1$$

Dann

$$T\frac{d\theta}{dt} + \theta = k_u Q_{Zu} + k_z\,\theta_A$$

Bedeutung des Vorzeichens?

m:	kg	Q_{Zu} :	J/s
$\overline{C}_P$:	$\mathrm{J/(kg \cdot K)}$	$\overline{U}$:	$\mathrm{J/(m^2 \cdot K \cdot s)}$
θ, θ_A :	K	A:	m^2
t, T :	s		

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Beschreibung des Prozesses:

$$T\frac{d\theta}{dt} + \theta = k_u Q_{Zu} + k_z\,\theta_A$$

Der stationäre Zustand:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta^{ST} = k_u Q_{Zu}^{ST} + k_z\,\theta_A^{ST}$$

Die Änderung vom stationären Zustand:

$$\Delta\theta = \theta - \theta^{ST}$$

$$\Delta Q_{Zu} = Q_{Zu} - Q_{Zu}^{ST} \quad \Rightarrow \quad T\frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta\theta = k_u \Delta Q_{Zu} + k_z\,\Delta\theta_A$$

$$\Delta\theta_A = \theta_A - \theta_A^{ST}$$

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Beschreibung des Prozesses:

$$T\frac{d\Delta\theta}{dt}+\Delta\theta=k_u\Delta Q_{Zu}+k_z\,\Delta\theta_A$$

Führungsstrecke ($\Delta Q_{Zu}\rightarrow\Delta\theta$): $$T\frac{d\Delta\theta}{dt}+\Delta\theta=k_u\Delta Q_{Zu}$$

Störstrecke ($\Delta\theta_A\rightarrow\Delta\theta$): $$T\frac{d\Delta\theta}{dt}+\Delta\theta=k_z\,\Delta\theta_A$$

Definition: $y=\Delta\theta,\quad u=\Delta Q_{Zu},\quad z=\Delta\theta_A$

$$\boxed{T\frac{dy}{dt}+y=k_u u+k_z\,z}$$

$T:$ Zeitkonstante

$k_u, k_z:$ Verstärkung

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Lösung der Differentialgleichung:

Führungsstrecke ($\Delta Q_{Zu} \to \Delta\theta$):

$$T\frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta\theta = k_u \Delta Q_{Zu}$$

$$T\frac{dy}{dt} + y = k_u u$$

Die homogene Differentialgleichung:

$$T\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$T\frac{dy}{dt} = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{1}{T}dt \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y} = -\int_0^t \frac{1}{T}d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{y}{y_0} = -\frac{t}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = y_0 e^{-\frac{t}{T}}}$$

Physikalische Bedeutung?

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Lösung der Differentialgleichung:

Die inhomogene Differentialgleichung: $$T\frac{dy}{dt}+y=k_u u$$

Ansatz: $$y=C(t)e^{-\frac{t}{T}}$$

Daher

$$\frac{dy}{dt}=\dot{C}(t)e^{-\frac{t}{T}}-C(t)\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$T\left[\dot{C}(t)e^{-\frac{t}{T}}-C(t)\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right]+C(t)e^{-\frac{t}{T}}=k_u u$$

$$\Rightarrow \quad T\,\dot{C}(t)e^{-\frac{t}{T}}=k_u u \quad \Rightarrow \quad dC=\frac{k_u}{T}e^{\frac{t}{T}}u\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{C(0)}^{C(t)}dC=\frac{k_u}{T}\int_0^t e^{\frac{\tau}{T}}u(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad C(t)=C(0)+\frac{k_u}{T}\int_0^t e^{\frac{\tau}{T}}u(\tau)\,d\tau$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Lösung der Differentialgleichung:

Die inhomogene Differentialgleichung: $$T\frac{dy}{dt}+y=k_u u$$

Ansatz: $$y=C(t)e^{-\frac{t}{T}}$$

$$C(t)=C(0)+\frac{k_u}{T}\int_0^t e^{\frac{\tau}{T}}u(\tau)\,d\tau$$

Daher $$y=C(0)e^{-\frac{t}{T}}+\frac{k_u}{T}e^{-\frac{t}{T}}\int_0^t e^{\frac{\tau}{T}}u(\tau)\,d\tau$$

Also $$\boxed{y(t)=y(0)e^{-\frac{t}{T}}+\frac{k_u}{T}e^{-\frac{t}{T}}\int_0^t e^{\frac{\tau}{T}}u(\tau)\,d\tau}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Temperaturregelung im Gewächshaus

Lösung der Differentialgleichung:

$$y(t) = y(0)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{k_u}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T}} u(\tau)\, d\tau$$

Wenn sich die Wärmezufuhr sprunghaft ändert, d.h. $u = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \Delta\tilde{Q} & t \geq 0 \end{cases}$

dann

$$y = y(0)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{k_u}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T}} \Delta\tilde{Q}(\tau)\, d\tau = y(0)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{k_u \Delta\tilde{Q}}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T}}\, d\tau$$

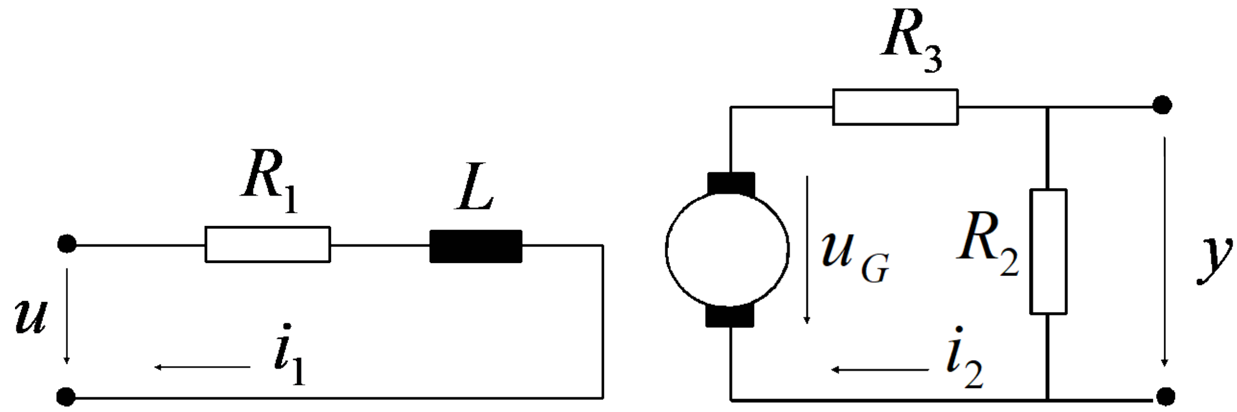
$$= y(0)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{k_u \Delta\tilde{Q}}{T} e^{-\frac{t}{T}}\, T\, e^{\frac{\tau}{T}} \Big|_0^t = y(0)e^{-\frac{t}{T}} + k_u \Delta\tilde{Q} e^{-\frac{t}{T}} (e^{\frac{t}{T}} - 1)$$

$$= y(0)e^{-\frac{t}{T}} + k_u \Delta\tilde{Q}(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Physikalische Bedeutung?

Beispiel: Gleichstromgenerator

Beschreibung des Prozesses:



Erregerkreis: $u = R_1 i_1 + L \dfrac{di_1}{dt}$

Generator: $\Phi = \dfrac{N}{R_m} i_1, \quad u_G = c\,n\,\Phi = c\,n \dfrac{N}{R_m} i_1$

Ankerkreis: $y = R_2 i_2 = R_2 \dfrac{u_G}{R_2 + R_3}$

Φ: Magnetischer Fluss

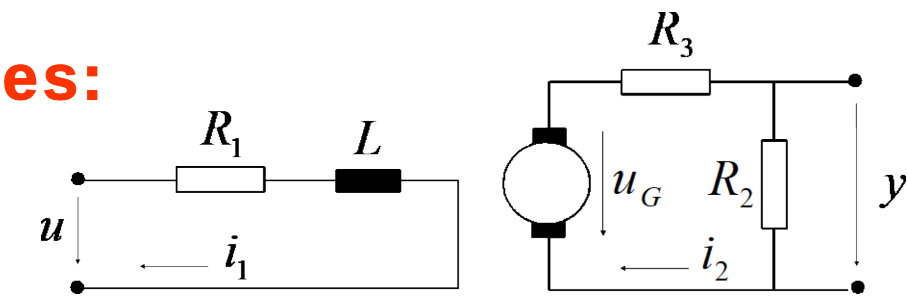
N : Windungszahl

n : Antriebsdrehzahl

R_m : Magnetischer Widerstand

Beispiel: Gleichstromgenerator

Beschreibung des Prozesses:



Erregerkreis:

$$u = R_1 i_1 + L \frac{d i_1}{dt}$$

Generator:

$$\Phi = \frac{N}{R_m} i_1, \quad u_G = c\, n\, \Phi = c\, n \frac{N}{R_m} i_1$$

Ankerkreis:

$$y = R_2 i_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_G$$

Dann

$$y = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_G = \boxed{\frac{R_2}{R_2 + R_3} c\, n \frac{N}{R_m}} i_1 = k_1\, i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{y}{k_1}$$

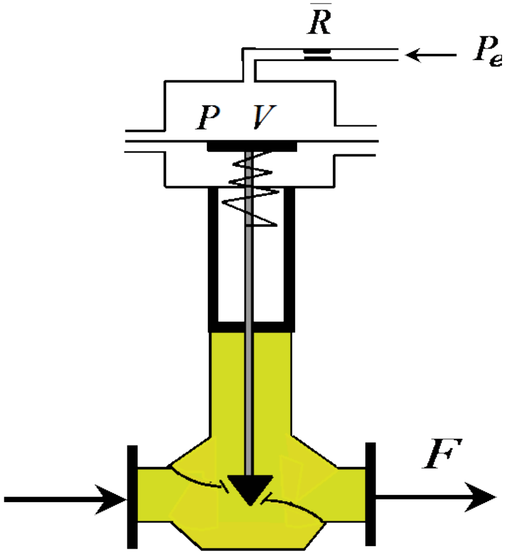
Daher

$$u = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} = \frac{R_1}{k_1} y + \frac{L}{k_1} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{L}{R_1} \frac{dy}{dt} + y = \frac{k_1}{R_1} u \quad \Rightarrow \quad \boxed{T \frac{dy}{dt} + y = k_u u}$$

Beispiel: Dynamik eines Regelventils

$\Rightarrow$



Idealgasgleichung: $$PV = nRT$$

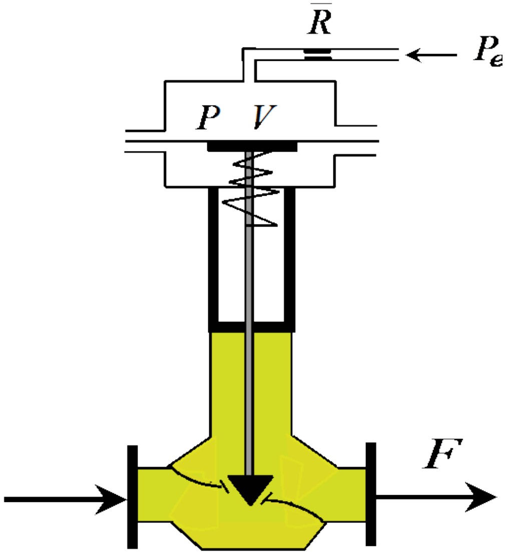
Dichte des Gases: $$\rho = \frac{n}{V} M = \frac{P}{RT} M \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{M}{RT} \frac{dP}{dt}$$

Gasstrom zum Ventil: $$\dot{G} = \frac{d(V\rho)}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} = \frac{P_e - P}{\bar{R}}$$

Daher $$V \frac{d\rho}{dt} = V \frac{M}{RT} \frac{dP}{dt} = \frac{P_e - P}{\bar{R}}$$

Beispiel: Dynamik eines Regelventils

$\Rightarrow$



Also

$$\frac{VM\bar{R}}{RT}\frac{dP}{dt}+P=P_e \quad \Rightarrow \quad T_V\frac{dP}{dt}+P=P_e$$

Es gilt

$$\Delta F=-k_V\Delta P \quad \text{(Minusvorzeichen!)}$$

Dann

$$-k_V T_V\frac{d\Delta P}{dt}-k_V\Delta P=-k_V\Delta P_e \quad \Rightarrow \quad T_V\frac{d\Delta F}{dt}+\Delta F=-k_V\Delta P_e$$

Die Zeitkonstante eines Regelventils ist kleiner als eine Sekunde.

Beispiel: Dynamik eines Regelventils

Normierung der Variablen: Druck: 0,2 – 1,0 bar, Strom: 0 – 5 l/s

Normierte Variablen:

$$\tilde{F} = \frac{F - F_{\min}}{F_{\max} - F_{\min}}, \qquad \tilde{P}_e = \frac{P_e - P_{e,\min}}{P_{e,\max} - P_{e,\min}}$$

Dann

$$F = F_{\min} + (F_{\max} - F_{\min})\tilde{F}, \qquad P_e = P_{e,\min} + (P_{e,\max} - P_{e,\min})\tilde{P}_e$$

Da

$$T_V \frac{d\Delta F}{dt} + \Delta F = -k_V \Delta P_e$$

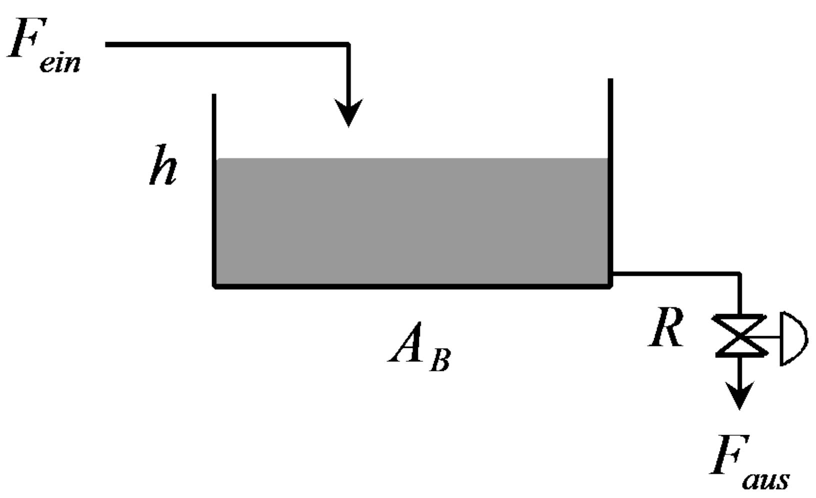
also

$$T_V (F_{\max} - F_{\min}) \frac{d\Delta\tilde{F}}{dt} + (F_{\max} - F_{\min})\Delta\tilde{F} = -k_V (P_{e,\max} - P_{e,\min})\Delta\tilde{P}_e$$

Daher

$$\boxed{T_V \frac{d\Delta\tilde{F}}{dt} + \Delta\tilde{F} = -k_V \frac{(P_{e,\max} - P_{e,\min})}{(F_{\max} - F_{\min})}\Delta\tilde{P}_e = \tilde{k}_V \Delta\tilde{P}_e}$$

Beispiel: Füllstand eines Behälters



Bilanzgleichung: $$A_B \frac{dh}{dt} = F_{ein} - F_{aus}, \quad h(0) = h_0$$

Korrelation: $$F_{aus} = c A_V \sqrt{h}$$

Daher $$A_B \frac{dh}{dt} + c A_V \sqrt{h} = F_{ein}$$

h	:	Regelgröße
F_{ein}	:	Störgröße
A_V	:	Stellgröße

Das System ist nichtlinear!

Linearisierung nichtlinearer Systeme

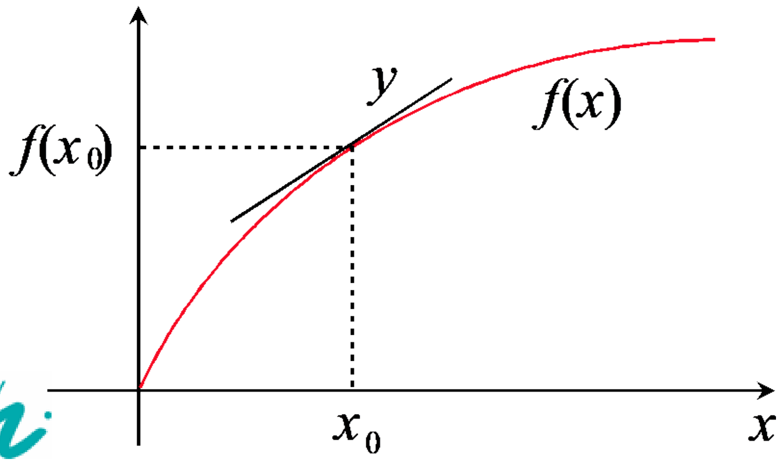
Taylor-Entwicklung einer nichtlinearen Funktion:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots$$

Approximation mit einer linearen Beziehung:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = y$$

Grafische Darstellung:



x_0 ist der Arbeitspunkt.

In der Nähe von x_0 kann man $f(x)$ mit y annähern.

Fachgebiet Prozessoptimierung

Linearisierung nichtlinearer Systeme

Linearisierung der Funktion $F_{aus} = c A_V \sqrt{h}$

am Arbeitspunkt A_{V0}, h_0

Es gilt: $$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 (y - y_0)$$

Daher $$F_{aus} \approx F_{aus0} + c\sqrt{h_0}(A_V - A_{V0}) + cA_{V0}\frac{1}{2\sqrt{h_0}}(h - h_0)$$

Also $$\Delta F_{aus} \approx c\sqrt{h_0}\,\Delta A_V + cA_{V0}\frac{1}{2\sqrt{h_0}}\Delta h$$

Da $$A_B \frac{d\,\Delta h}{dt} + \Delta F_{aus} = \Delta F_{ein}$$

$$\Rightarrow \quad A_B \frac{d\,\Delta h}{dt} + \frac{cA_{V0}}{2\sqrt{h_0}}\Delta h = \Delta F_{ein} - c\sqrt{h_0}\,\Delta A_V$$

Bedeutung des Vorzeichens?

Linearisierung nichtlinearer Systeme

$$A_B \frac{d\,\Delta h}{dt} + \frac{cA_{V0}}{2\sqrt{h_0}}\Delta h = \Delta F_{ein} - c\sqrt{h_0}\,\Delta A_V$$

Dann
$$\boxed{\frac{2A_B\sqrt{h_0}}{cA_{V0}}}\frac{d\,\Delta h}{dt} + \Delta h = \boxed{\frac{2\sqrt{h_0}}{cA_{V0}}}\Delta F_{ein} \boxed{-\frac{2h_0}{A_{V0}}}\Delta A_V$$

D.h.
$$T\frac{d\,\Delta h}{dt} + \Delta h = k_z \Delta F_{ein} + k_u\,\Delta A_V$$

Führungsstrecke ($\Delta A_V \to \Delta h$):
$$T\frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = k_u \Delta A_V$$

Störstrecke ($\Delta F_{ein} \to \Delta h$):
$$T\frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = k_z\,\Delta F_{ein}$$

h	:	Regelgröße
F_{ein}	:	Störgröße
A_V	:	Stellgröße

Standardformulierung:

$$T\frac{dy}{dt} + y = k_u u + k_z z$$

Die Antwort auf einen Einheitssprung von u:

$$y(t) = \cancel{y(0)} + k_u\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

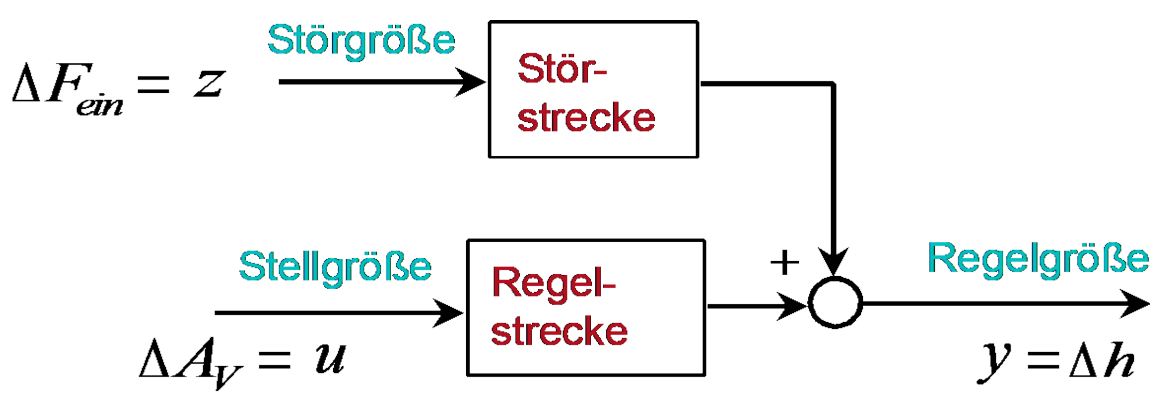
$$u = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Die Antwort auf einen Einheitssprung von z:

$$y(t) = \cancel{y(0)} + k_z\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$z = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Physikalische Bedeutung:



Kennwerte von Strecken

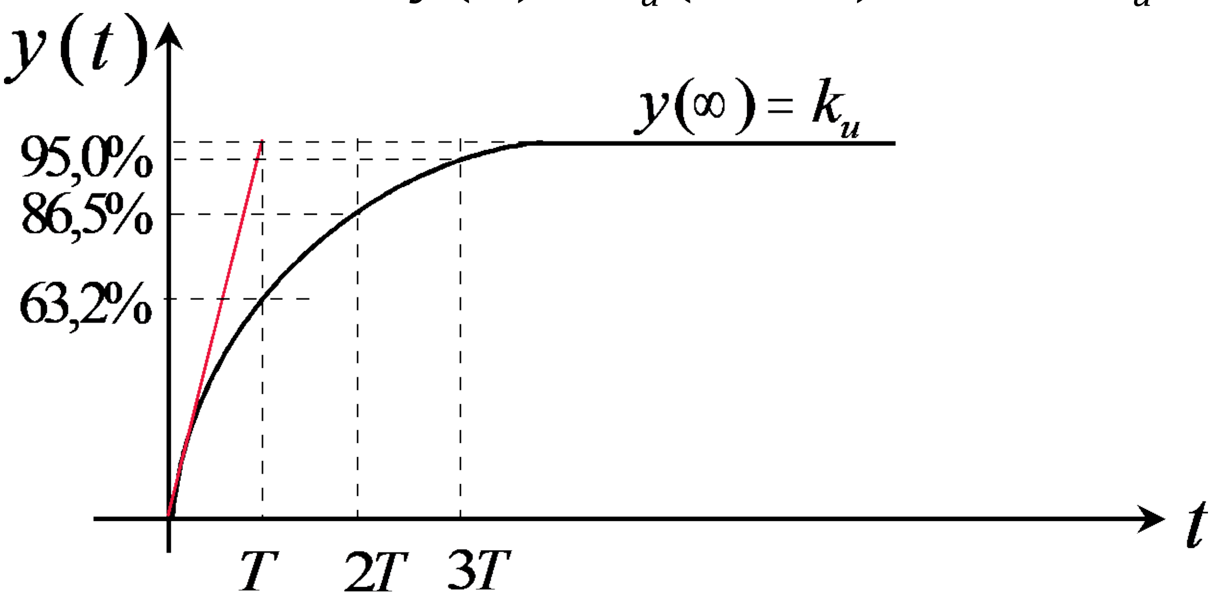
$$T\frac{dy}{dt}+y=k_u u$$

Die Sprungantwort:

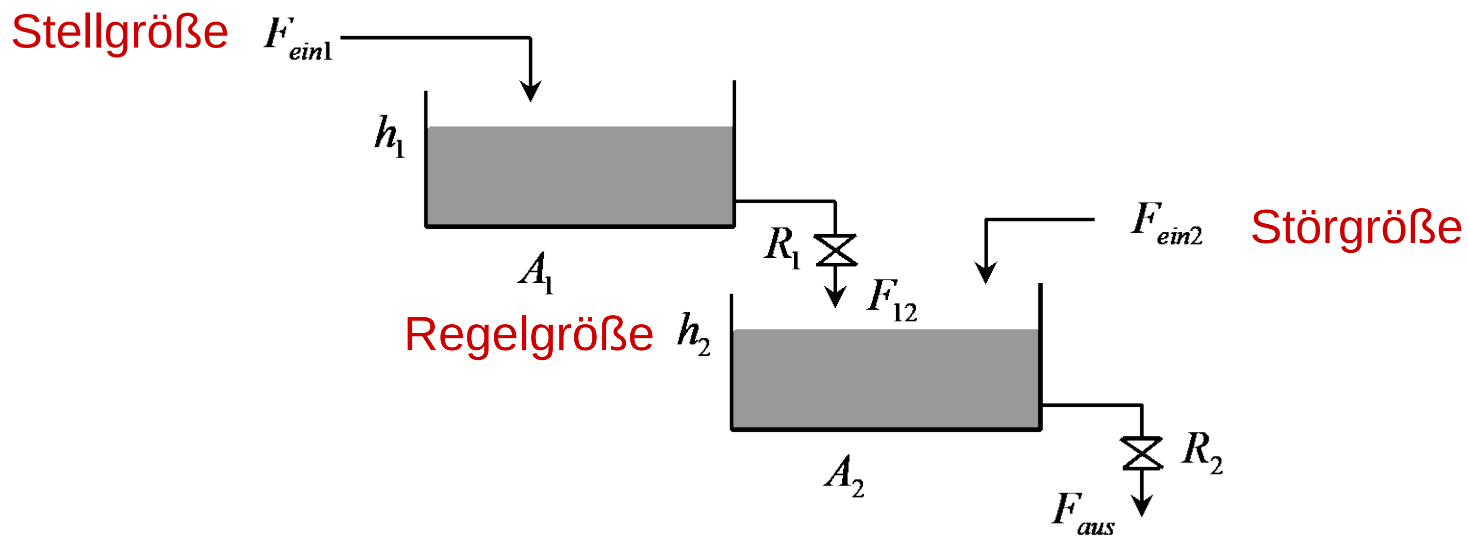
$$y(t)=y(0)+k_u(1-e^{-\frac{t}{T}}) \quad \text{mit} \quad y(0)=0, \quad y(\infty)=k_u$$

Da $\quad \dot{y}(t)=\frac{k_u}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad$ dann $\quad \dot{y}(0)=\frac{k_u}{T}$

Wenn $\quad t=T \quad$ dann $\quad y(T)=k_u(1-e^{-1})=0{,}632k_u$



Beispiel: Behälterkaskade



Bilanzgleichungen:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_{ein1} - F_{12}, \qquad h_1(0) = h_{10}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = F_{12} + F_{ein2} - F_{aus}, \qquad h_2(0) = h_{20}$$

Variablen: $h_1, h_2, F_{12}, F_{aus}$ (Zustandsvariablen)

F_{ein1}, F_{ein2} (Stell- bzw. Störvariablen)

Parameter: A_1, A_2, h_{10}, h_{20}

Beispiel: Behälterkaskade

Korrelationen:

$$F_{12} = c_1\sqrt{h_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta F_{12} = \frac{1}{R_1}\Delta h_1, \qquad \Delta h_1 = h_1 - h_{10}$$

$$F_{aus} = c_2\sqrt{h_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta F_{aus} = \frac{1}{R_2}\Delta h_2, \quad \Delta h_2 = h_2 - h_{20}$$

Daher

$$A_1\frac{d\Delta h_1}{dt} = \Delta F_{ein1} - \Delta F_{12} = \Delta F_{ein1} - \frac{1}{R_1}\Delta h_1$$

$$A_2\frac{d\Delta h_2}{dt} = \Delta F_{12} + \Delta F_{ein2} - \Delta F_{aus} = \frac{1}{R_1}\Delta h_1 + \Delta F_{ein2} - \frac{1}{R_2}\Delta h_2$$

Also

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\Delta h_1}{dt} &= -\frac{1}{A_1R_1}\Delta h_1 + \frac{1}{A_1}\Delta F_{ein1} \\ \frac{d\Delta h_2}{dt} &= \frac{1}{A_2R_1}\Delta h_1 - \frac{1}{A_2R_2}\Delta h_2 + \frac{1}{A_2}\Delta F_{ein2} \end{aligned}}$$

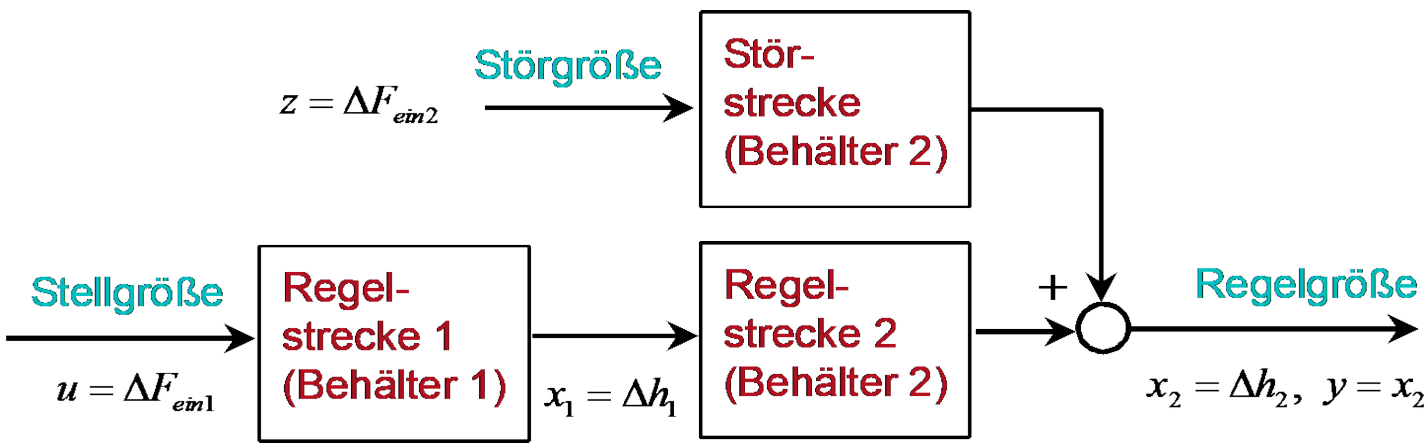
Standardformulierung:

Definition: $$x_1 = \Delta h_1, \quad x_2 = \Delta h_2, \quad y = x_2$$
$$u = \Delta F_{ein1}, \quad z = \Delta F_{ein2}$$

Dann

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 R_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= R_1 u \\ A_2 R_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= \frac{R_2}{R_1} x_1 + R_2 z \end{aligned}}$$

Physikalische Bedeutung:



Sprungantwort:

$$\tau_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1 u, \qquad x_1(0) = 0$$

$$\tau_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_2 x_1, \qquad x_2(0) = 0$$

dann $x_2(t) = y(t) = k_P \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right), \quad k_P = k_1 k_2$

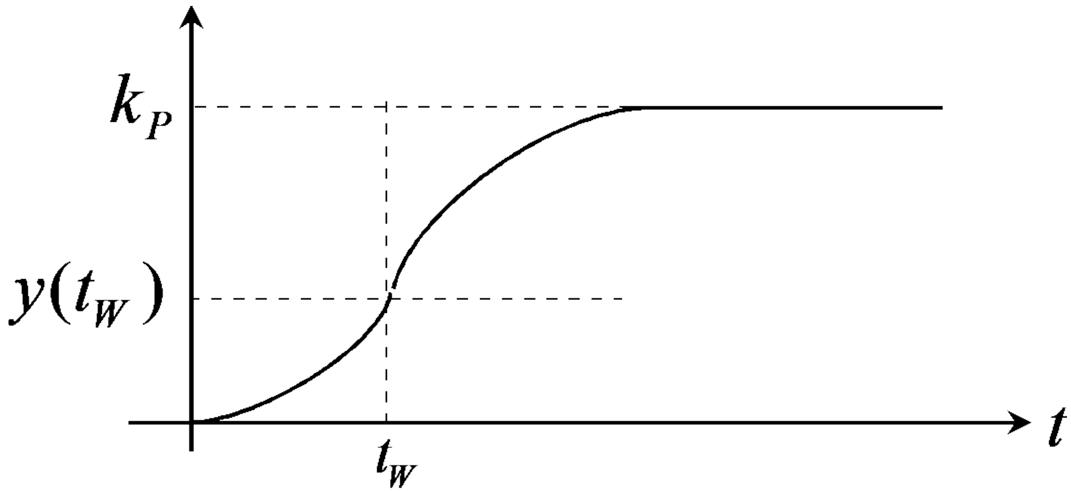
mit $y(0) = 0, \quad y(\infty) = k_P$

$$\dot{y}(t) = k_P \left(-\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(-\frac{1}{\tau_1} \right) + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left(-\frac{1}{\tau_2} \right) \right)$$

$$= \frac{k_P}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Sprungantwort:



$$\ddot{y}(t) = \frac{k_P}{\tau_1 - \tau_2}\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)\right)$$

Am Wendepunkt:

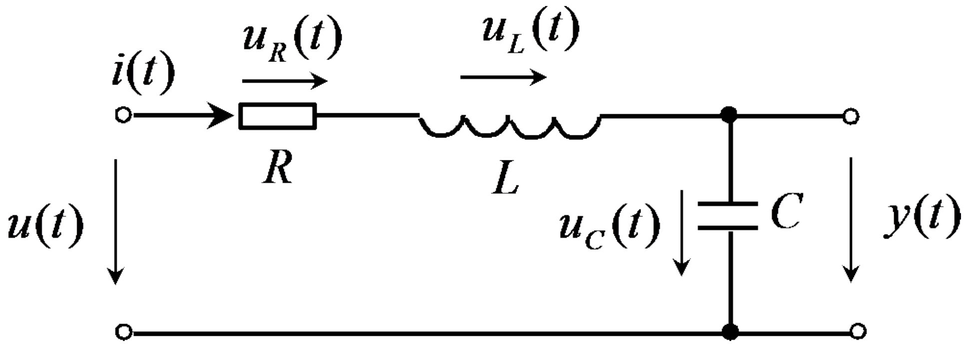
$$\ddot{y}(t_W) = \frac{k_P}{\tau_1 - \tau_2}\left(e^{-\frac{t_W}{\tau_1}}\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) - e^{-\frac{t_W}{\tau_2}}\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)\right) = 0$$

Es folgt

$$\boxed{t_W = \frac{\tau_2 \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \ln \frac{\tau_2}{\tau_1}}$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Elektrischer Schwingkreis



Bilanzgleichung: $u = u_L + u_R + u_C$

mit $u_L = L\dfrac{di}{dt}, \quad u_R = R\,i, \quad i = C\dfrac{du_C}{dt}$

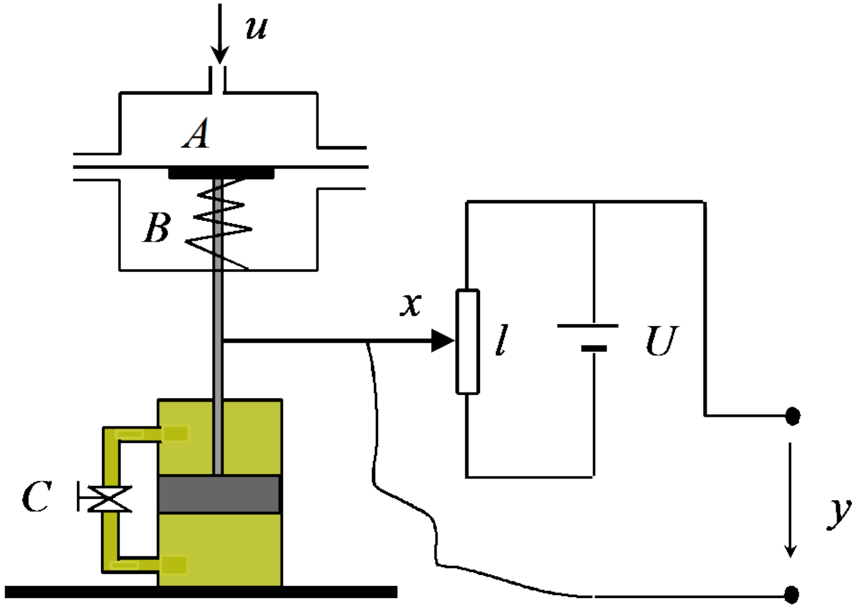
Parameter: L, R, C

Weil $u_L = L\dfrac{di}{dt} = LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung!

Beispiel: Elektropneumatischer Wandler



Die Antriebskraft: $F = Au$

Die Gegenkräfte: $F_1 = B\,x$

$F_2 = C\,\dot{x}$

$F_3 = m\,\ddot{x}$

Die Bilanz:

$$m\,\ddot{x} + C\,\dot{x} + B\,x = Au$$

Es gilt $\dfrac{U}{l} = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{l}{U}\,y$

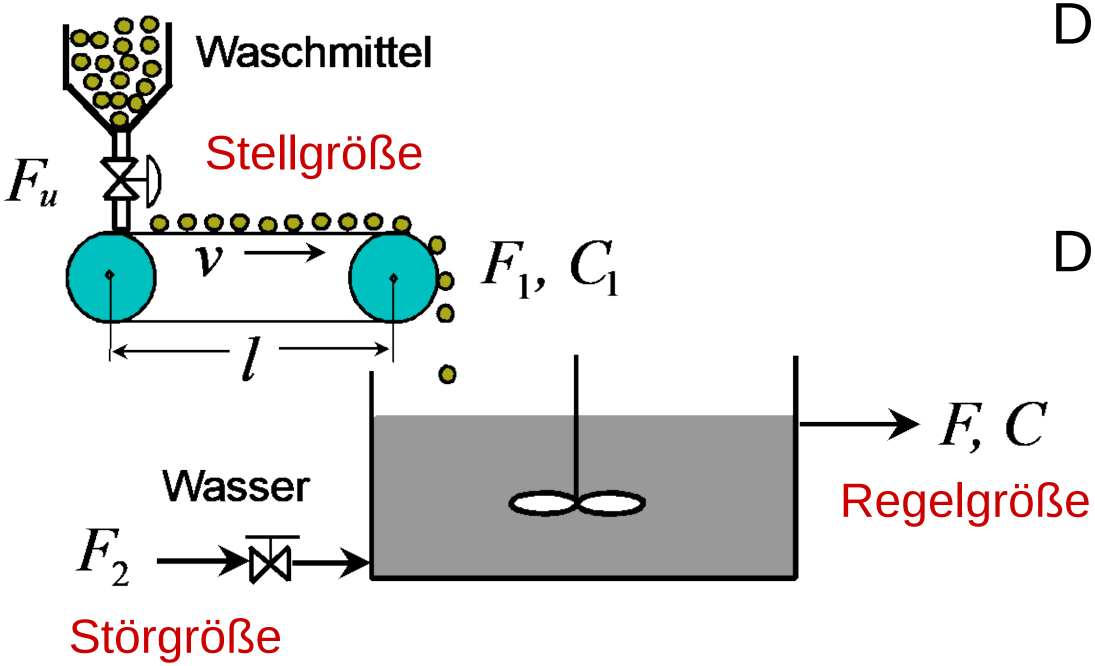
Daher $$m\frac{l}{U}\ddot{y} + C\frac{l}{U}\dot{y} + B\frac{l}{U}y = Au$$

Daher $$\frac{m}{B}\ddot{y} + \frac{C}{B}\dot{y} + y = \frac{U\,A}{l\,B}u$$

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung!

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Ein Mischungsprozess



Das Volumen bleibt konstant:

$$F = F_1 + F_2$$

Die Komponentenbilanz:

$$\begin{aligned} V\frac{dC}{dt} &= F_1C_1 + \cancel{F_2C_2} - FC \\ &= F_1C_1 - FC \\ &= F_1C_1 - (F_1 + F_2)C \end{aligned}$$

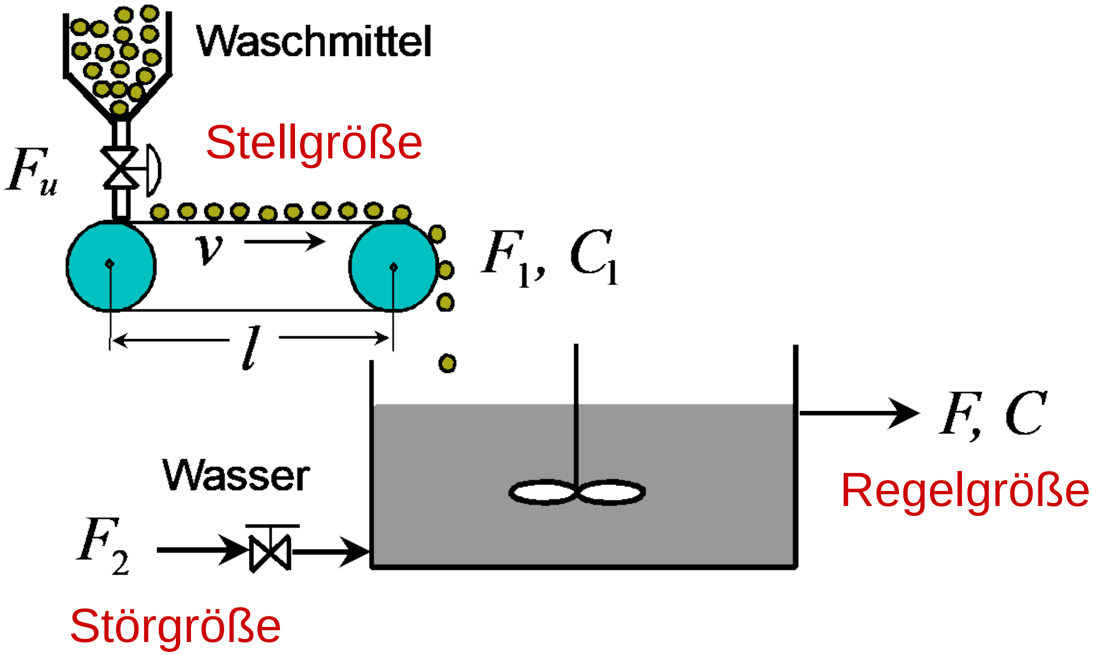
Linearisierung der Gleichung:

$$V\frac{d\Delta C}{dt} = C_1\Delta F_1 - (\Delta F_1 + \Delta F_2)C_0 - (F_{10} + F_{20})\Delta C$$

Dann

$$V\frac{d\Delta C}{dt} + (F_{10} + F_{20})\Delta C = C_1\Delta F_1 - (\Delta F_1 + \Delta F_2)C_0$$

Beispiel: Ein Mischungsprozess



Die Zeitverschiebung:

$$T_t = \frac{l}{v}$$

Totzeit!

Also

$$\Delta F_1(t) = \begin{cases} 0 & t < T_t \\ \Delta F_u(t - T_t) & t \geq T_t \end{cases}$$

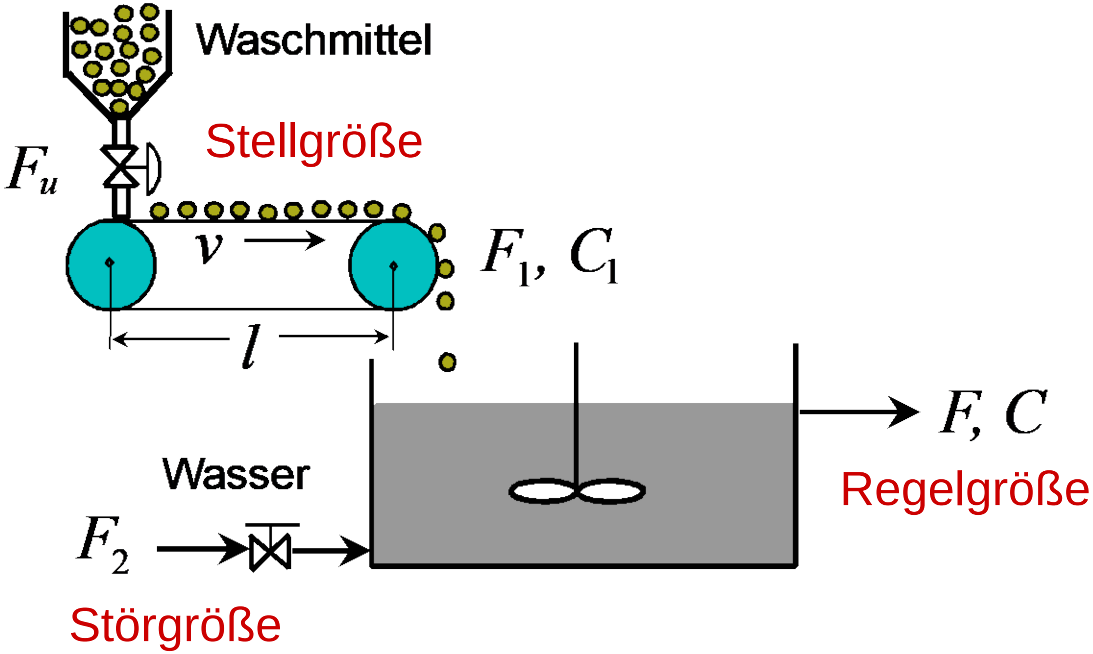
Die linearisierte Gleichung:

$$\frac{V}{F_{10} + F_{20}} \frac{d\Delta C}{dt} + \Delta C = \frac{C_1 - C_0}{F_{10} + F_{20}} \Delta F_1 - \frac{C_0}{F_{10} + F_{20}} \Delta F_2$$

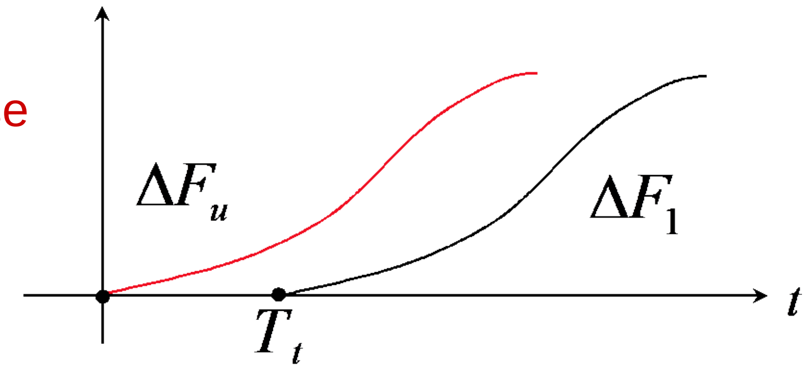
D. h.

$$T \frac{d\Delta C}{dt} + \Delta C = k_u \Delta F_1 + k_z \Delta F_2 = k_u \Delta F_u(t - T_t) + k_z \Delta F_2$$

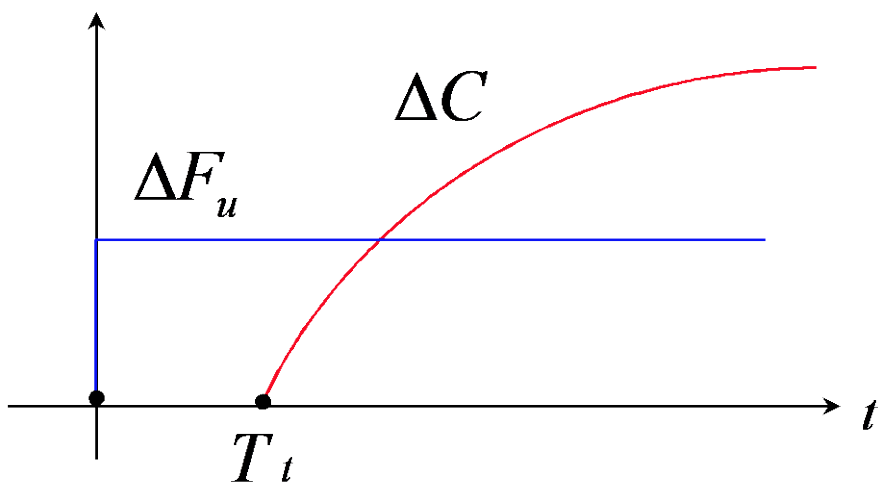
Beispiel: Ein Mischungsprozess



$$\Delta F_1(t) = \begin{cases} 0 & t < T_t \\ \Delta F_u(t - T_t) & t \geq T_t \end{cases}$$



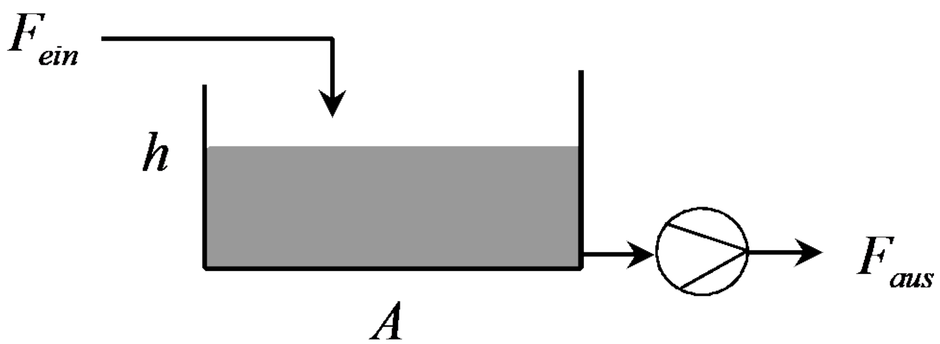
Grafische Darstellung:



Die Totzeit macht die Regelung instabil!

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Füllstand eines Behälters



Regelgröße: h

Stellgröße: F_{aus}

Störgröße: F_{ein}

Bilanzgleichung: $$A\frac{dh}{dt} = F_{ein} - F_{aus}, \quad h(0) = h_0$$

Die Änderung am Arbeitspunkt: $$A\frac{d\Delta h}{dt} = \Delta F_{ein} - \Delta F_{aus}, \quad \Delta h(0) = 0$$

mit $y = \Delta h, z = \Delta F_{ein}, u = \Delta F_{aus}$: $$A\frac{dy}{dt} = z - u, \quad y(0) = 0$$

Bei einem Sprung des Eingangsstrom:

d. h. $$z = \Delta F_{ein} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \qquad u = \Delta F_{aus} = 0$$

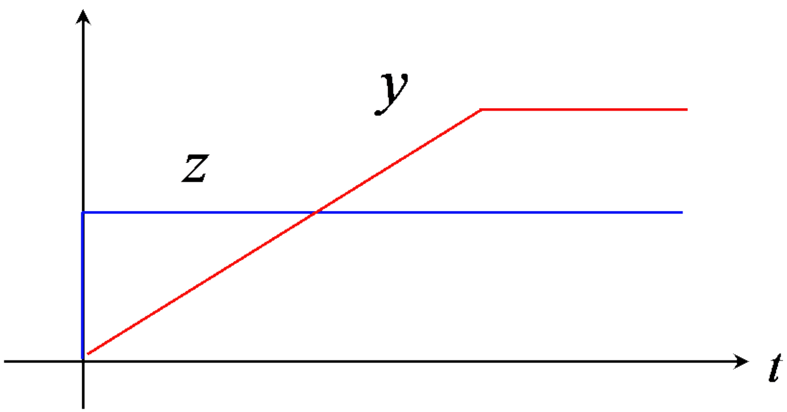
Fachgebiet Prozessoptimierung

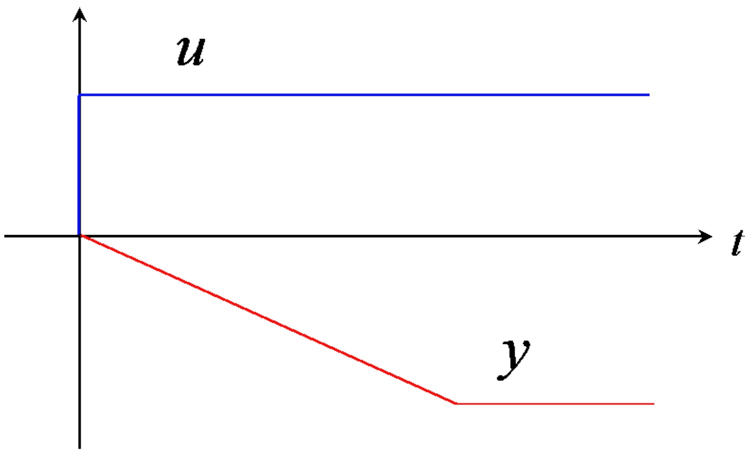
Beispiel: Füllstand eines Behälters

Dann $$A\frac{dy}{dt} = z, \quad y(0) = 0$$

also $$dy = \frac{z}{A}\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^y dy = \frac{1}{A}\int_0^t z\,d\tau \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{A}t$$

Grafische Darstellung:

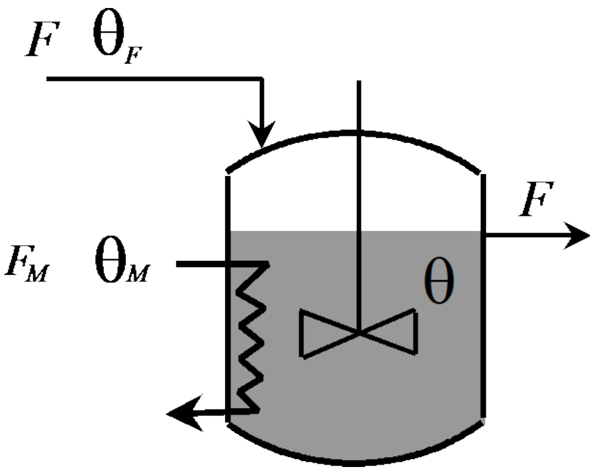




Es zeigt ein Integrationsverhalten. Das System muss stabilisiert werden!

Fachgebiet Prozessoptimierung

Beispiel: Reaktor mit exothermer Reaktion



Energiebilanz:

$$C_P \rho V \frac{d\theta}{dt} = F C_P \rho (\theta_F - \theta) - Q_M + Q_R$$

wobei

$$Q_R = rV = k_0 e^{-\frac{E}{R\theta}} V$$

Daher

$$C_P \rho V \frac{d\theta}{dt} = F C_P \rho (\theta_F - \theta) - Q_M + k_0 e^{-\frac{E}{R\theta}} V$$

$$\frac{V}{F}\frac{d\theta}{dt} = \theta_F - \theta - \frac{Q_M}{C_P \rho F} + \frac{k_0 V}{C_P \rho F} e^{-\frac{E}{R\theta}}$$

also

$$T_1 \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_F - k_u Q_M + k_R e^{-\frac{E}{R\theta}}$$

Der Prozess ist nichtlinear!

Beispiel: Reaktor mit exothermer Reaktion

Linearisierung am Arbeitspunkt:

$$T_1 \frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta\theta = \Delta\theta_F - k_u \Delta Q_M + \boxed{k_R \frac{E}{R\theta_0^2} e^{-\frac{E}{R\theta_0}}}\Delta\theta$$

Damit $$T_1 \frac{d\Delta\theta}{dt} + (1 - \tilde{k}_R)\Delta\theta = \Delta\theta_F - k_u \Delta Q_M$$

Normalerweise $\tilde{k}_R >> 1$

D. h. $$T_1 \frac{d\Delta\theta}{dt} - \tilde{k}_R \Delta\theta = \Delta\theta_F - k_u \Delta Q_M$$

D. h. $$\frac{T_1}{\tilde{k}_R} \frac{d\Delta\theta}{dt} - \Delta\theta = \frac{1}{\tilde{k}_R}\Delta\theta_F - \frac{k_u}{\tilde{k}_R}\Delta Q_M$$

$$\tilde{T}_1 \frac{d\Delta\theta}{dt} - \Delta\theta = k_z \Delta\theta_F - \tilde{k}_u \Delta Q_M$$

Wie verhält sich die Temperatur?

Fachgebiet Prozessoptimierung

Typische Prozessdarstellungen (Strecken):

PT$_1$:

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = k_u u + k_z z$$

PT$_1$T$_t$ (mit Totzeit):

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = k_u u(t - T_t) + k_z z$$

PT$_2$:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy}{dt} + y = k_u u + k_z z$$

PT$_2$T$_t$ (mit Totzeit):

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy}{dt} + y = k_u u(t - T_t) + k_z z$$

I:

$$\frac{dy}{dt} = k_u u + k_z z$$

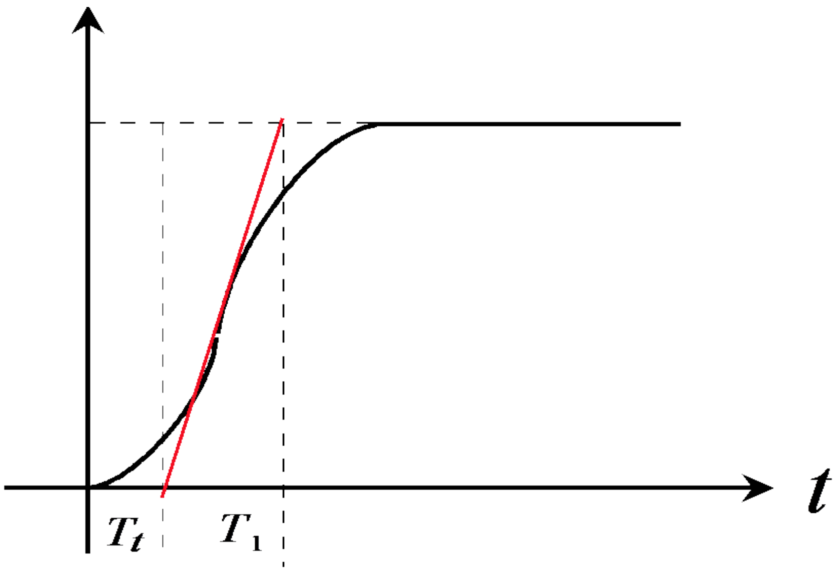
IT$_t$ (mit Totzeit):

$$\frac{dy}{dt} = k_u u(t - T_t) + k_z z$$

Allgemeine Darstellung:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = k_u u + k_z z$$

Die Sprungantwort:



Sehr häufig wird eine Strecke approximiert mit PT_1+Totzeit:

PT_1T_t (mit Totzeit):

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = k_u u(t - T_t) + k_z z$$

Fachgebiet Prozessoptimierung