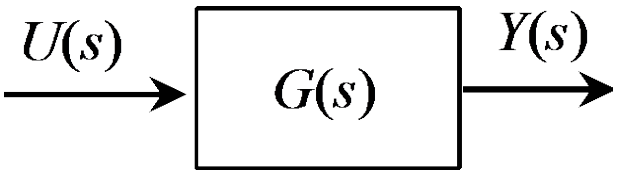
Regelungs- und Systemtechnik 1

Kapitel 5: Entwurf von Regelungssystemen im Frequenzbereich

Prof. Dr.-Ing. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Problemdarstellung:



Das System wird von einem Signal mit einer bestimmten Frequenz betrieben:

$$u(t) = A\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Welche Frequenz hat die Ausgangsvariable?

Wie groß ist die Amplitude der Ausgangsvariable?

Wie groß ist die Phasendifferenz zwischen der Eingangs- und Ausgangsvariablen?

Die Frequenzgangdarstellung

Ausgang:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

d.h.

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s + j\omega} + \frac{\alpha_2}{s - j\omega} + \frac{\alpha_3}{s + s_1} + \frac{\alpha_4}{s + s_2} + \cdots$$

wobei

$$\alpha_1 = \frac{A\omega}{s - j\omega} G(s)\Big|_{s=-j\omega} = -\frac{A}{2j} G(-j\omega)$$

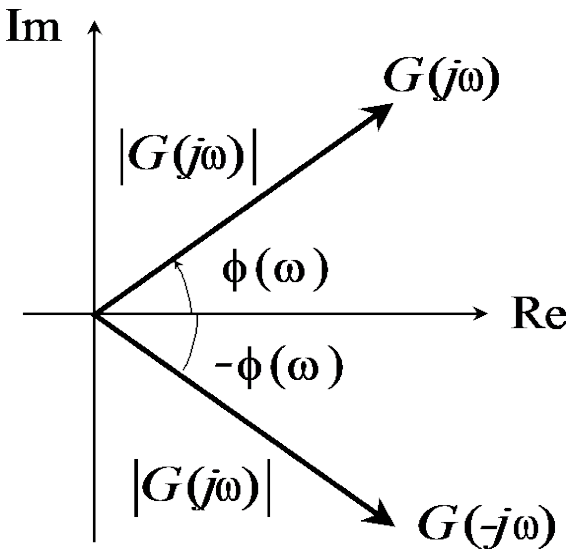
$$\alpha_2 = \frac{A\omega}{s + j\omega} G(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{A}{2j} G(j\omega)$$

Wenn $G(s)$ nur stabile Polstellen hat, ergibt sich die Ausgangsvariable quasi-stationär bei $t \to \infty$

Ausgang:

$$y(t) = \frac{A}{2j}\left[-G(-j\omega)e^{-j\omega t} + G(j\omega)e^{j\omega t}\right]$$

Die Frequenzgangdarstellung



Da $$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

daher

$$y(t) = \frac{A}{2j}\left[-G(-j\omega)e^{-j\omega t} + G(j\omega)e^{j\omega t}\right]$$

$$= \frac{A}{2j}|G(j\omega)|\left[-e^{-j(\omega t+\phi)} + e^{j(\omega t+\phi)}\right]$$

$$= A|G(j\omega)|\sin[\omega t + \phi(\omega)]$$

- **Der Ausgang hat die gleiche Frequenz** ω
- **Die Amplitude wird verändert mit dem Faktor** $|G(j\omega)|$
- **Es gibt eine Phasenverschiebung** $\phi(\omega)$

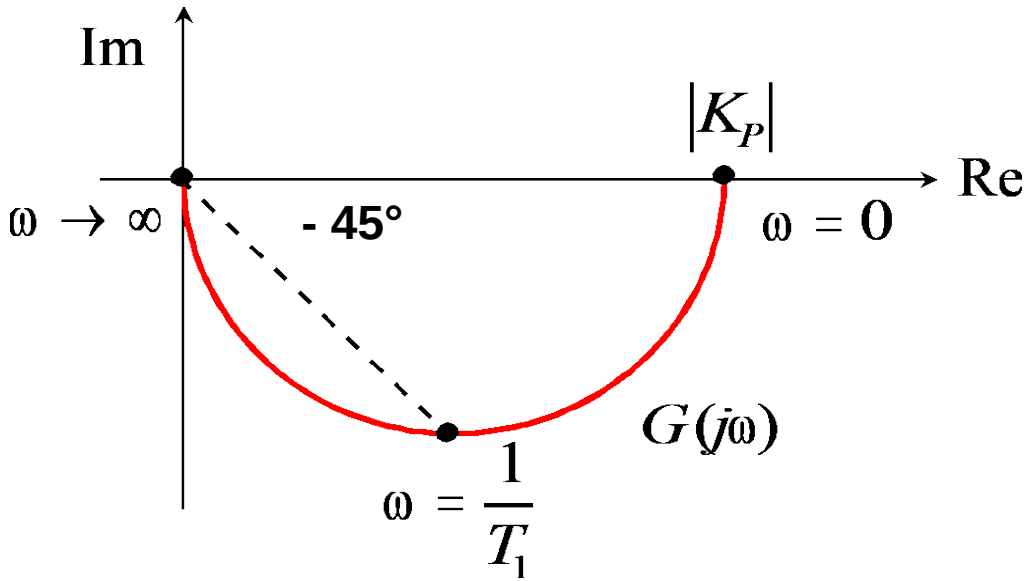
Frequenzgangortskurve

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

Wie läuft $G(j\omega)$, wenn sich ω von 0 bis zu ∞ ändert?

PT1-Glied: $$G(s) = \frac{K_P}{T_1 s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K_P}{jT_1\omega + 1} = \frac{K_P(1 - jT_1\omega)}{T_1^2\omega^2 + 1} = \frac{|K_P|}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}} \angle -\arctan T_1\omega$$



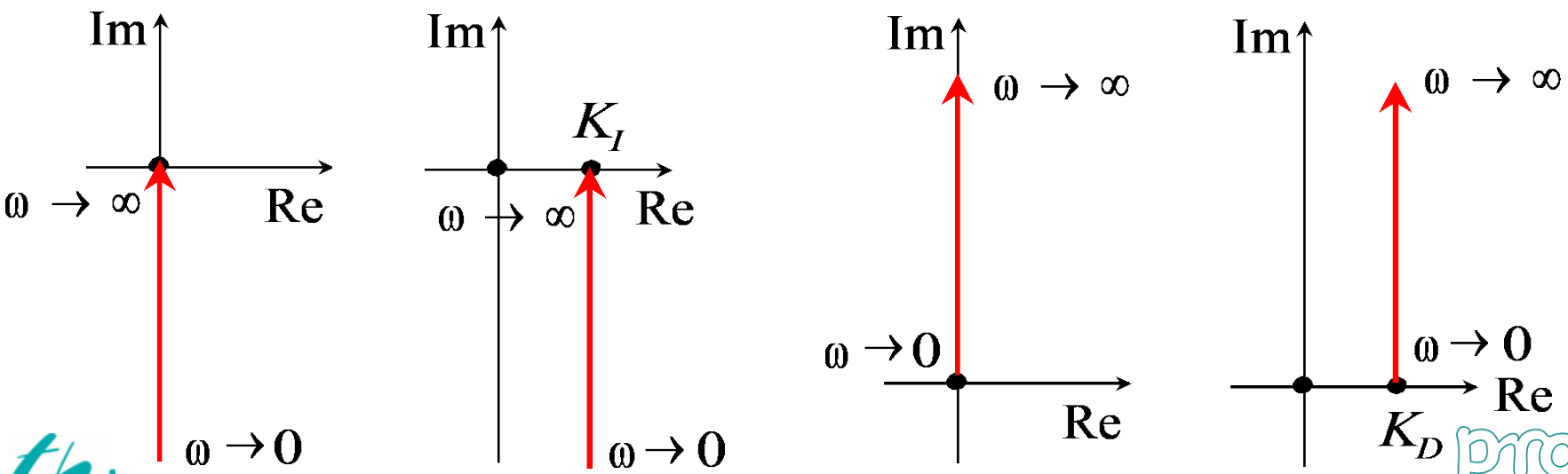
Frequenzgangortskurve

I-Glied: $G(s) = \dfrac{1}{T_I s} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \dfrac{1}{jT_I\omega} = \dfrac{1}{T_I\omega}\angle -\dfrac{\pi}{2}$

PI-Glied: $G(s) = K_I\left(1 + \dfrac{1}{T_I s}\right) \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = K_I\left(1 + \dfrac{1}{jT_I\omega}\right)$

D-Glied: $G(s) = T_D s \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = jT_D\omega = T_D\omega\angle\dfrac{\pi}{2}$

PT_{D1}-Glied: $G(s) = K_D(1 + T_D s) \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = K_D(1 + jT_D\omega)$



Fachgebiet Prozessoptimierung

Frequenzgangortskurve

PT$_2$-Glied: $$G(s)=\frac{K_P}{s^2+2d\omega_0 s+\omega_0^2}$$

d.h. $$G(s)=\frac{\frac{K_P}{\omega_0^2}}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+\frac{2d}{\omega_0}s+1}=\frac{\tilde{K}_P}{\left(\frac{s}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{2d}{\omega_0}s+1}$$

$$G(j\omega)=\frac{\tilde{K}_P}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+2d\frac{\omega}{\omega_0}j+1}=\frac{\tilde{K}_P}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+2d\frac{\omega}{\omega_0}j}$$

also $$\left|G(j\omega)\right|=\frac{\left|\tilde{K}_P\right|}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(2d\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},\quad \phi(\omega)=-\arctan\frac{2d\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Bei $\omega=\omega_0$, $\left|G(j\omega_0)\right|=\frac{\left|\tilde{K}_P\right|}{2d}$, $\phi(\omega_0)=-\frac{\pi}{2}$

Frequenzgangortskurve

Zur Analyse von $|G(j\omega)|$ definiert man $f(\omega)=\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(2d\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

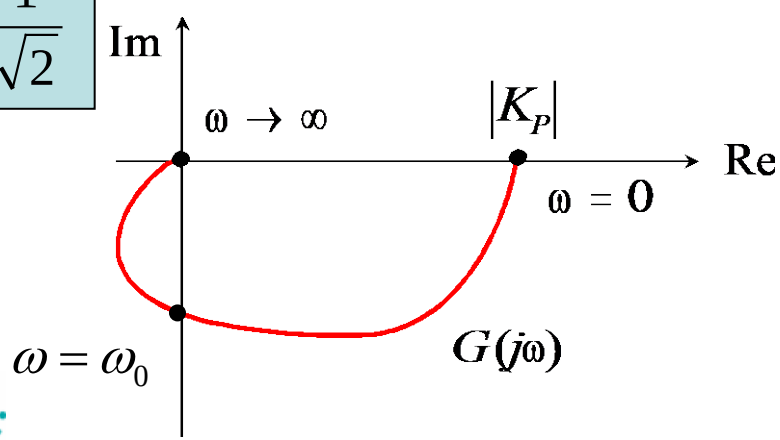
$$\frac{df}{d\omega}=2\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]\left(-2\frac{\omega}{\omega_0^2}\right)+2\left(2d\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(2d\frac{1}{\omega_0}\right)=0$$

damit $\omega=\omega_0\sqrt{1-2d^2}\equiv\omega_r$, für $d<\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $f(\omega_r)=\min f(\omega)$

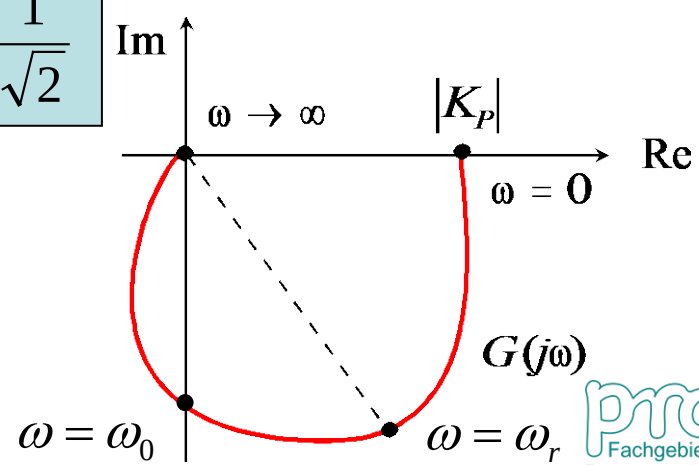
ω_r : Resonanzfrequenz

Also $\max|G(j\omega)|=|G(j\omega_r)|=\frac{\tilde{K}_P}{2d\sqrt{1-d^2}}$ (es kann sehr gefährlich sein!)

$d\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$



$d<\frac{1}{\sqrt{2}}$



Frequenzgangortskurve

PT3-Glied:

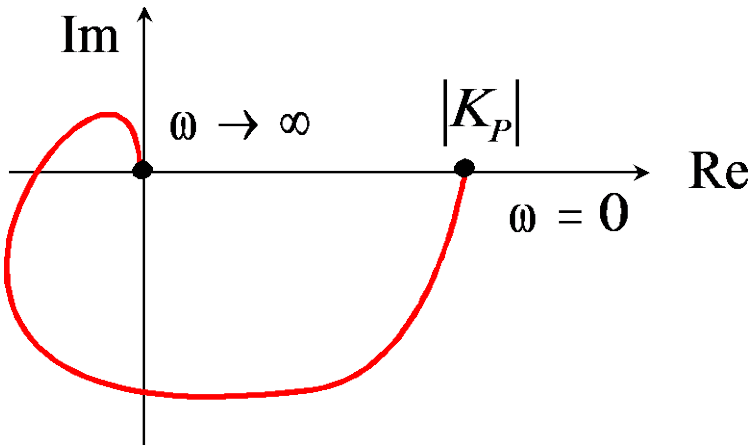
$$G(s) = \frac{K_P}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K_P}{(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)(1 + jT_3\omega)}$$

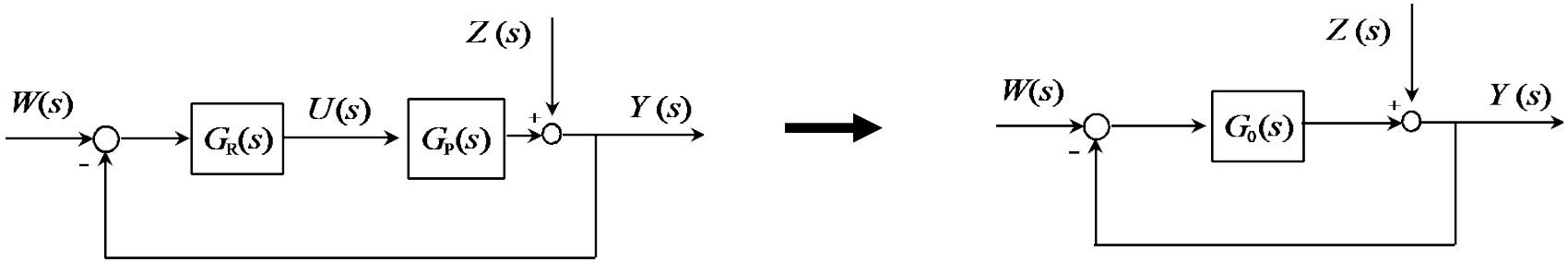
also

$$|G(j\omega)| = \frac{|K_P|}{\sqrt{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)(1 + T_3^2\omega^2)}}$$

$$\phi(\omega) = -(\arctan T_1\omega + \arctan T_2\omega + \arctan T_3\omega)$$



Stabilität rückgekoppelter Systeme



Ist das geschlossene System stabil?

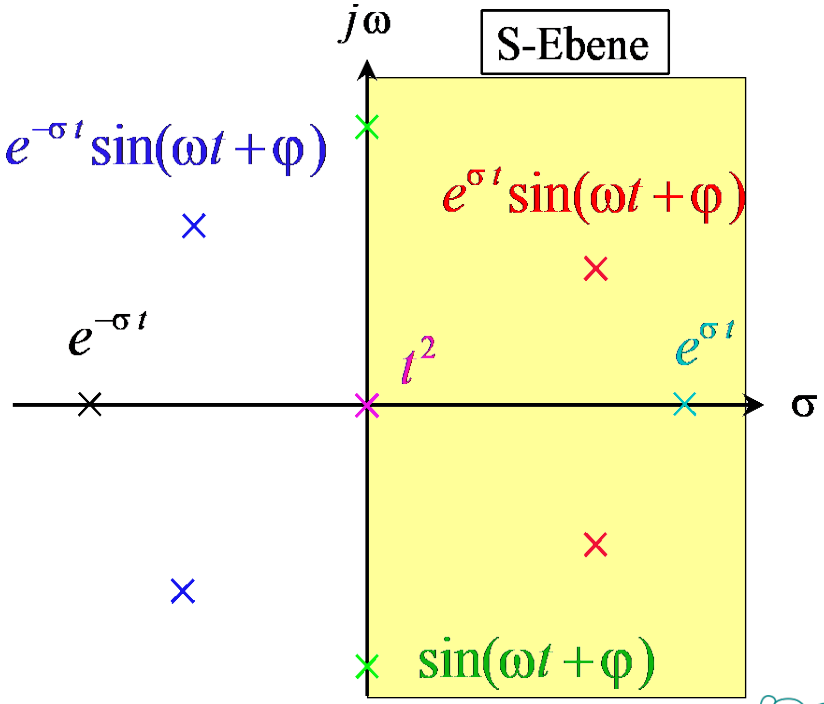
Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Systems:

$$H(s) = G_0(s) + 1 = 0$$

Die Nullstellen dieser Gleichung entsprechen den Polstellen des geschlossenen Systems.

Unterschiedliche Postellen führen zu unterschiedlichen Sprungantworten.

Wenn alle Polstellen auf der linken Seite liegen, ist das System stabil.



Beschreibung der Polstellen durch die offene Kette

Die offene Kette: $G_0(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = G_0(s) + 1 = \dfrac{A(s) + B(s)}{B(s)}$

daher

$$H(s) = \frac{A(s) + B(s)}{B(s)} = \frac{k_H (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_{N_Z})}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{N_P})}$$

D.h. $A(s) + B(s) = k_H (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_{N_Z})$

$$B(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{N_P})$$

$z_1, z_2, \cdots, z_{N_Z}$ sind die Polstellen des geschlossenen Systems (Nullstellen des charakteristischen Polynoms).

$p_1, p_2, \cdots, p_{N_P}$ sind die Polstellen der offene Kette (bekannt).

Kann man anhand der bekannten offenen Kette feststellen, dass alle Polstellen des geschlossenen Systems ($z_1, z_2, \cdots, z_{N_Z}$) auf der Linkseite der S-Ebene liegen?

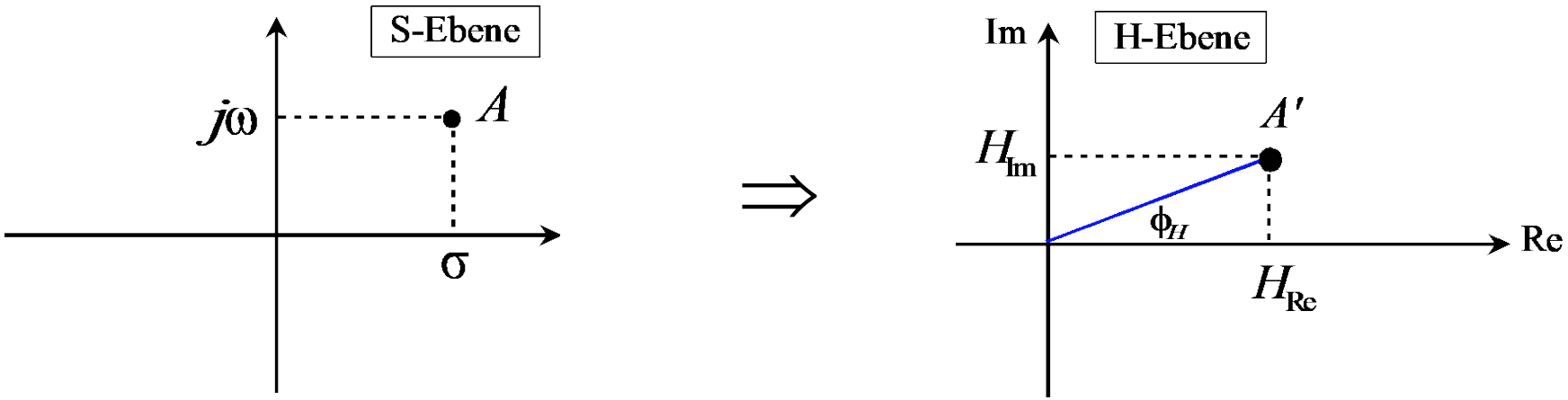
Beziehung zwischen der S-Ebene und der H-Ebene

$$H(s) = \frac{k_H (s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_{N_Z})}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{N_P})}$$

N_Z: Anzahl der Nullstellen, N_P: Anzahl der Polstellen

Die Projektion von der S-Ebene zu der H-Ebene:

$$s = \sigma + j\omega \qquad \Rightarrow \qquad H(s) = H(\sigma + j\omega) = H_{\mathrm{Re}} + jH_{\mathrm{Im}} = |H| \angle \phi_H$$

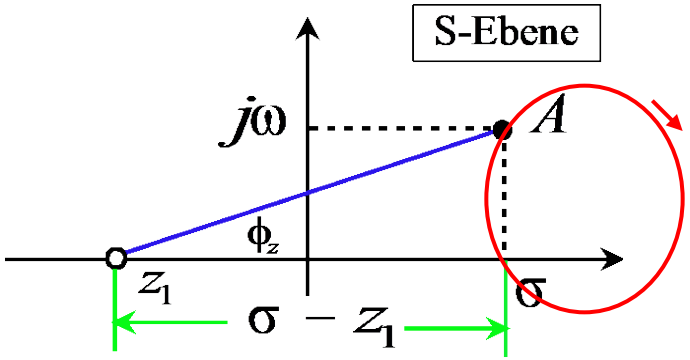


Was ist die Wirkung der Null- und Polstellen von $H(s)$ auf ϕ_H ?

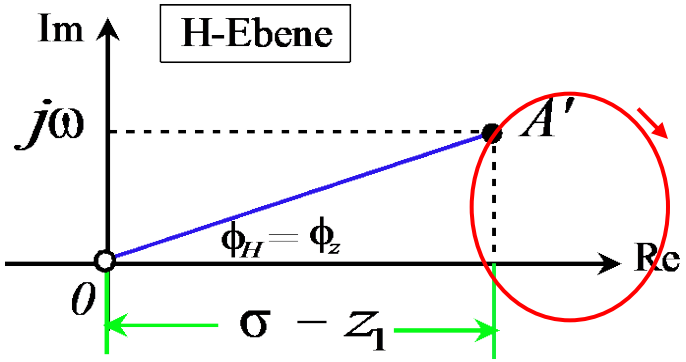
Beziehung zwischen der S-Ebene und der H-Ebene

Für eine reelle Nullstelle: $H(s) = (s - z_1)$

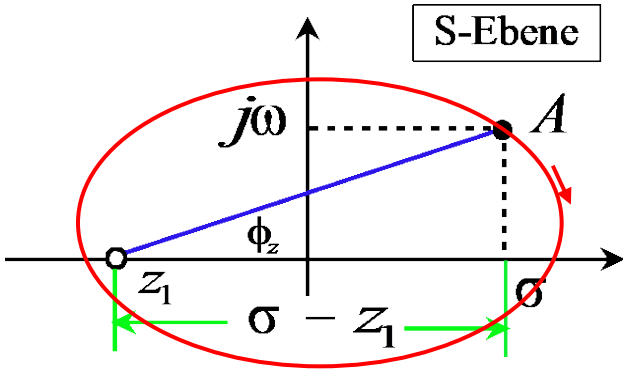
$$s = \sigma + j\omega \qquad \Rightarrow \qquad H(s) = \sigma + j\omega - z_1 = (\sigma - z_1) + j\omega$$



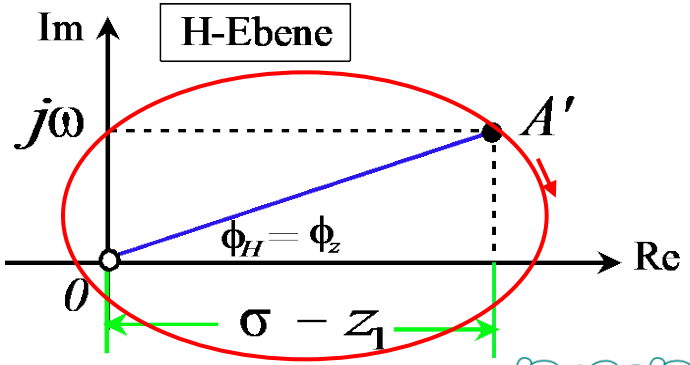
$\Rightarrow$



die Differenz des Winkels: $\Delta\phi_H = 0$



$\Rightarrow$

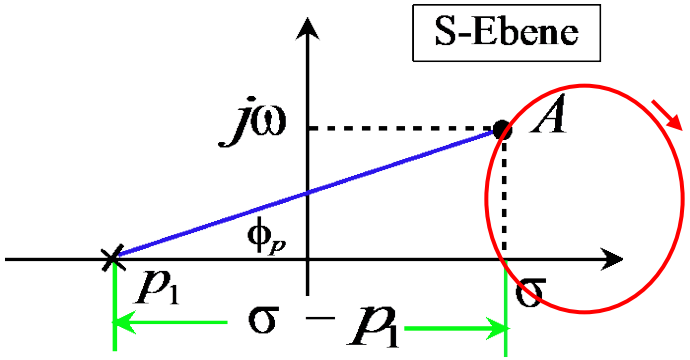


die Differenz des Winkels: $\Delta\phi_H = 2\pi$

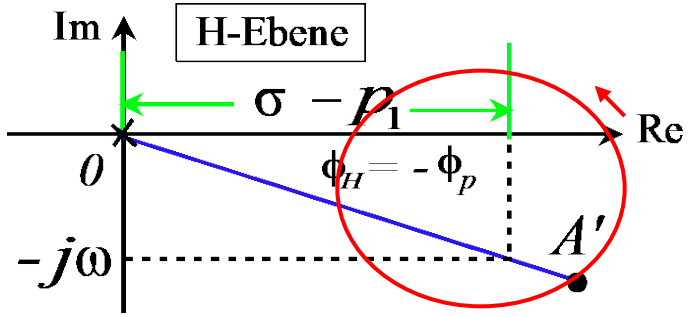
Beziehung zwischen der S-Ebene und der H-Ebene

Für eine reelle Polstelle: $H(s) = \dfrac{1}{(s - p_1)}$

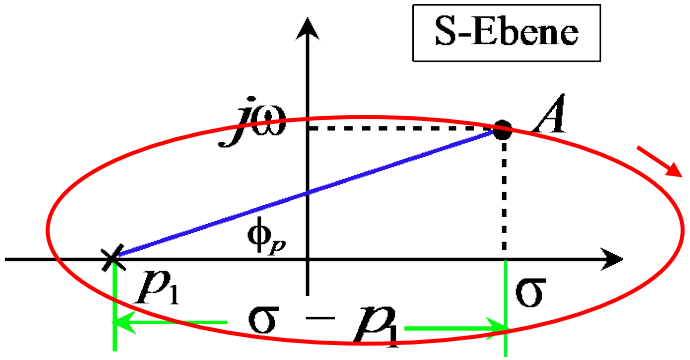
$$s = \sigma + j\omega \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{1}{(\sigma - p_1) + j\omega} = \frac{(\sigma - p_1) - j\omega}{(\sigma - p_1)^2 + \omega^2}$$



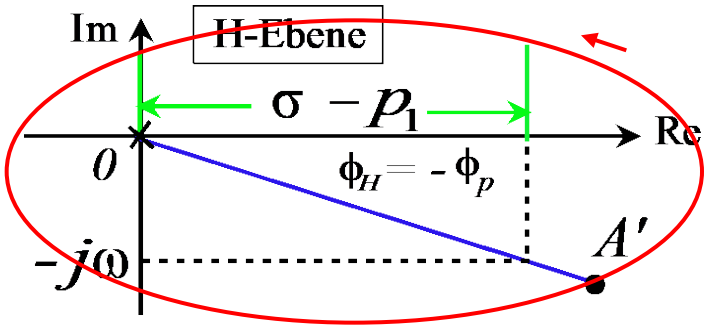
$\Rightarrow$



die Differenz des Winkels: $\Delta\phi_H = 0$



$\Rightarrow$



die Differenz des Winkels: $\Delta\phi_H = -2\pi$

Beziehung zwischen der S-Ebene und der G_0-Ebene

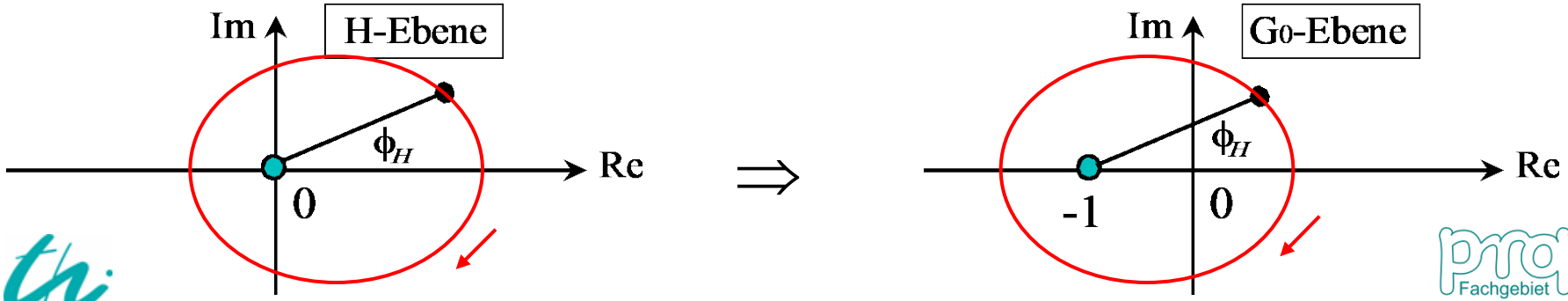
Diese Aussagen gelten auch für komplexe Null- und Polstelle.

$$H(s)=\frac{k_H(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{N_Z})}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{N_P})},\qquad \phi_H=\sum_{i=1}^{N_Z}\phi_i(s-z_i)-\sum_{j=1}^{N_P}\phi_j(s-p_j)$$

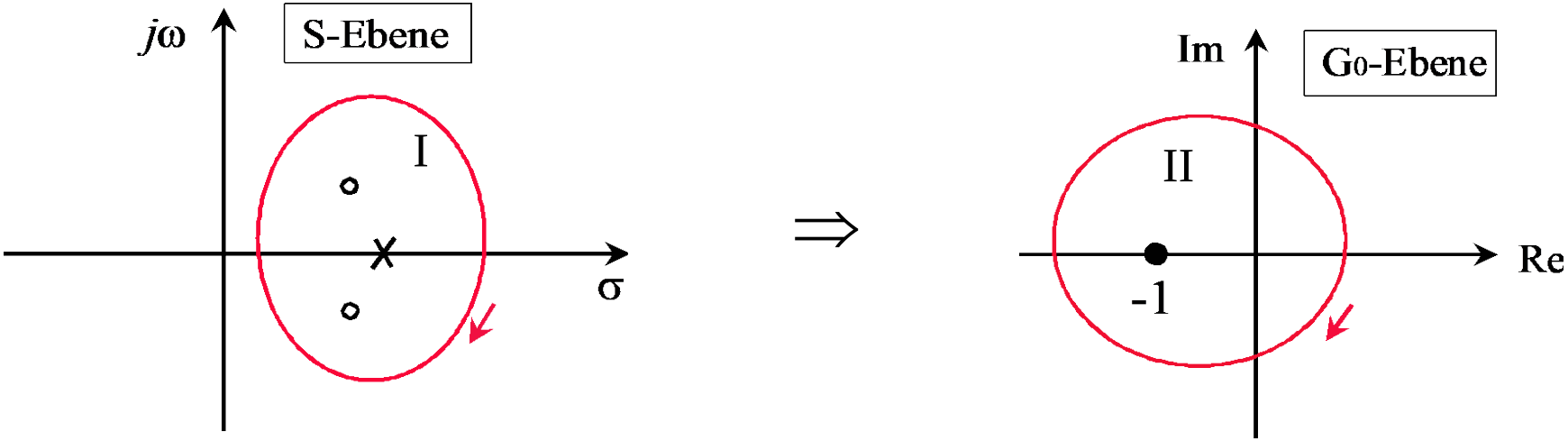
- Auf der S-Ebene wird ein Kreis im Uhrzeigersinn um ein Gebiet erstellt.
- Eine Nullstelle im umrissenen Gebiet führt zu $\Delta\phi_H$ einmal 2π.
- Eine Polstelle im umrissenen Gebiet führt zu $\Delta\phi_H$ einmal -2π.
- D.h. wenn alle Null- und Polstellen im Kreis: $\Delta\phi_H=2\pi(N_Z-N_P)$

Da $\quad H(s)=G_0(s)+1 \quad\Rightarrow\quad H(s)-1=G_0(s)$

$$s=\sigma+j\omega \quad\Rightarrow\quad G_0(s)=H(s)-1,\ H(\sigma+j\omega)-1=(H_{\mathrm{Re}}-1)+jH_{\mathrm{Im}}$$



Beschreibung der Umläufe von G_0



Wenn es im Bereich I N_Z Null- und N_P Polstellen gibt, dann

$$\Delta\phi_H = 2\pi(N_Z - N_P)$$

mit N_Z : Anzahl der Nullstellen im Bereich I

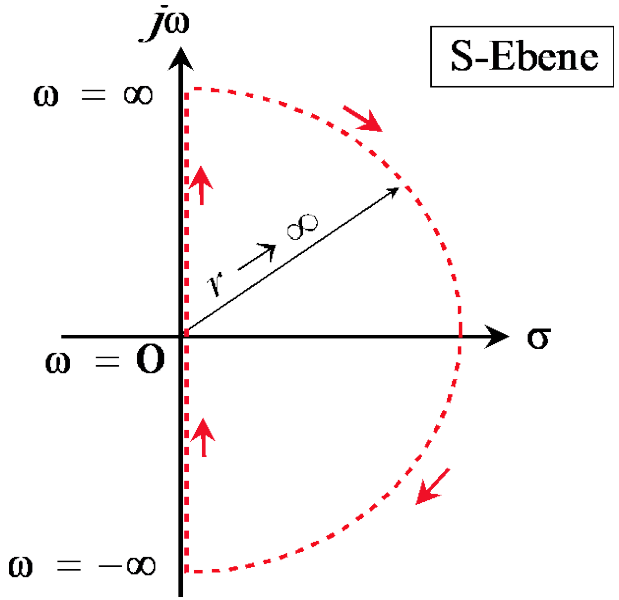
N_P : Anzahl der Polstellen im Bereich I

N_{G_0} : Anzahl der Umläufe von G_0 um $(-1+j0)$ im Uhrzeigersinn

D.h. $$\boxed{N_{G_0} = N_Z - N_P}$$

Stabilitätsanalyse mittels Nyquist-Kriterium

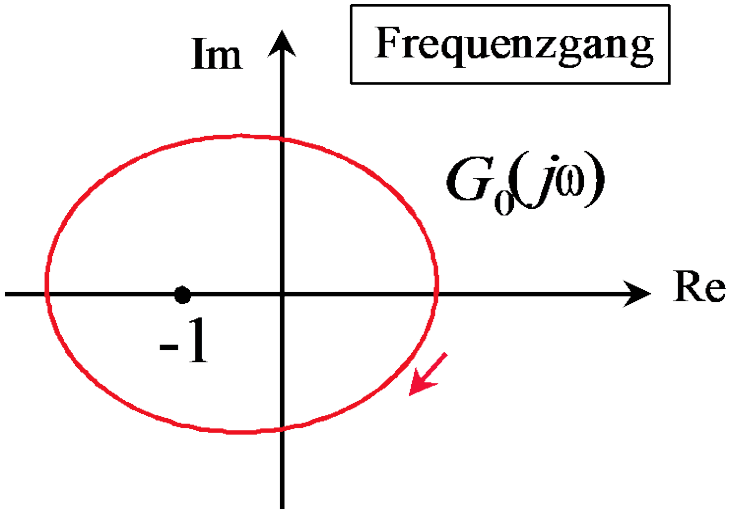
Nyquist-Kurve:



$$s = j\omega$$

$$\Rightarrow$$

$$\omega: \; -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$$



Die Frequenzgangortskurve ist zu der Realachse symmetrisch.

N_Z^+ : Anzahl der Polstellen des geschlossenen Systems in der rechten Halbebene der S-Ebene (zu ermitteln)

N_P^+ : Anzahl der Polstellen der offenen Kette in der rechten Halbebene der S-Ebene (bekannt)

N_{G_0} : Anzahl der Umläufe des Frequenzgangs um $(-1, j0)$ im Uhrzeigersinn (bekannt anhand der Frequenzgangortskurve)

Stabilitätsanalyse mittels Nyquist-Kriterium

Weil $$N_{G_0} = N_Z^+ - N_P^+$$

also $$\boxed{N_Z^+ = N_{G_0} + N_P^+}$$

N_Z^+ : Anzahl der Polstellen des geschlossenen Systems in der rechten Halbebene der S-Ebene (zu ermitteln)

N_P^+ : Anzahl der Polstellen der offenen Kette in der rechten Halbebene der S-Ebene (bekannt)

N_{G_0} : Anzahl der Umläufe des Frequenzgangs um $(-1, j0)$ im Uhrzeigersinn (bekannt anhand der Frequenzgangortskurve)

Das Nyquist-Kriterium:

Wenn $N_Z^+ = 0$, ist das geschlossene System stabil.

Wenn $N_Z^+ > 0$, ist das geschlossene System instabil.

Beispiel 1:

$$G_0(s) = \frac{K_0}{(s+1)(2s+1)(3s+1)}$$

In welchem Bereich von K_0 ist das geschlossene System stabil?

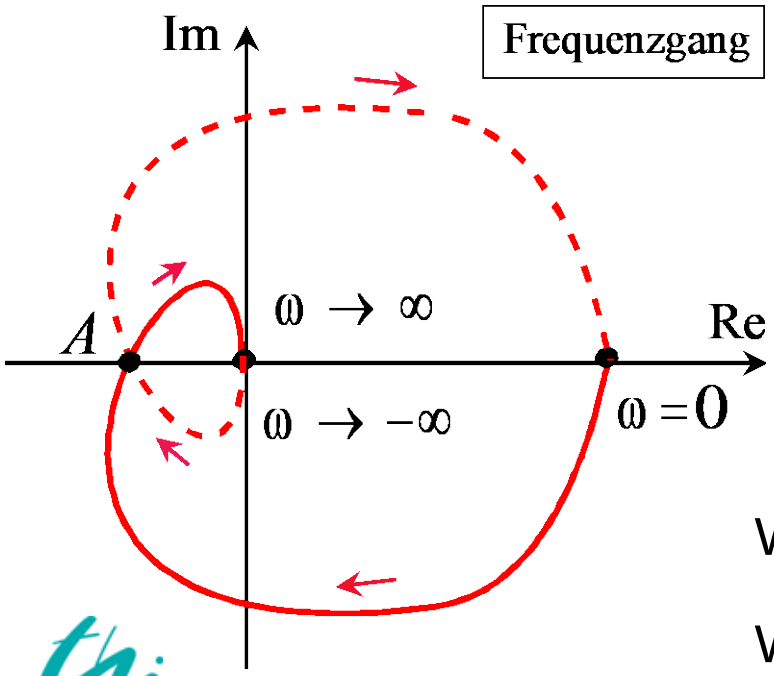
$N_P^+ = 0$ daher $N_Z^+ = N_{G_0} + N_P^+ = N_{G_0}$

$$G_0(j\omega) = \frac{K_0}{(1+j\omega)(1+j2\omega)(1+j3\omega)}$$

Weil $(1+j\omega)(1+j2\omega)(1+j3\omega)$

$$= 1 + j(1+2+3)\omega - (2+3+6)\omega^2 - j6\omega^3$$

$$= (1-11\omega^2) + j(6-6\omega^2)\omega$$



am Punkt A: $\omega^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm 1$

$$G_0(\omega = \pm 1) = -\frac{K_0}{10}$$

Wenn $K_0 < 10$, dann $N_Z^+ = N_{G_0} = 0$

Wenn $K_0 > 10$, dann $N_Z^+ = N_{G_0} = 2$

Beispiel 2:

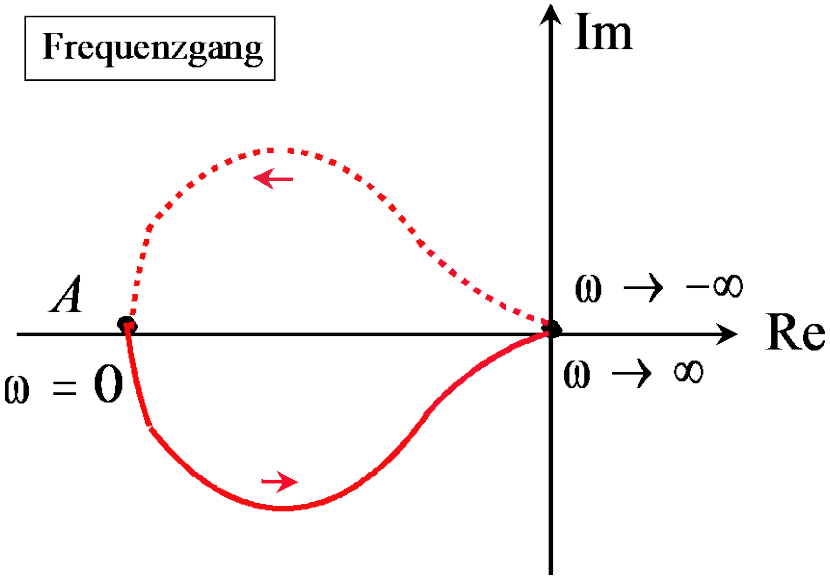
$$G_0(s) = \frac{K_0}{(s-1)(s+3)}$$

Das offene System ist instabil!

Kann man es durch ein geschlossenes System stabilisieren?

$N_P^+ = 1$ daher $N_Z^+ = N_{G_0} + N_P^+ = N_{G_0} + 1$

$$G_0(j\omega) = \frac{K_0}{(j\omega-1)(j\omega+3)}$$



Am Punkt A: $\omega = 0$

$$G_0(0) = -\frac{K_0}{3}$$

Wenn $K_0 < 3$, dann $N_Z^+ = 0 + 1 = 1$

Wenn $K_0 > 3$, dann $N_Z^+ = -1 + 1 = 0$

Beispiel 3:

$$G_0(s) = \frac{3}{s(s+1)^2}$$

Ist das geschlossene System stabil?

$N_P^+ = 0$ daher $N_Z^+ = N_{G_0} + N_P^+ = N_{G_0}$

$$G_0(j\omega) = \frac{3}{j\omega(j\omega+1)^2}$$

bei $\omega = 0^+ \quad \Rightarrow \quad G_0(j0^+) = \infty\angle -90°$

bei $\omega = 0^- \quad \Rightarrow \quad G_0(j0^-) = \infty\angle 90°$

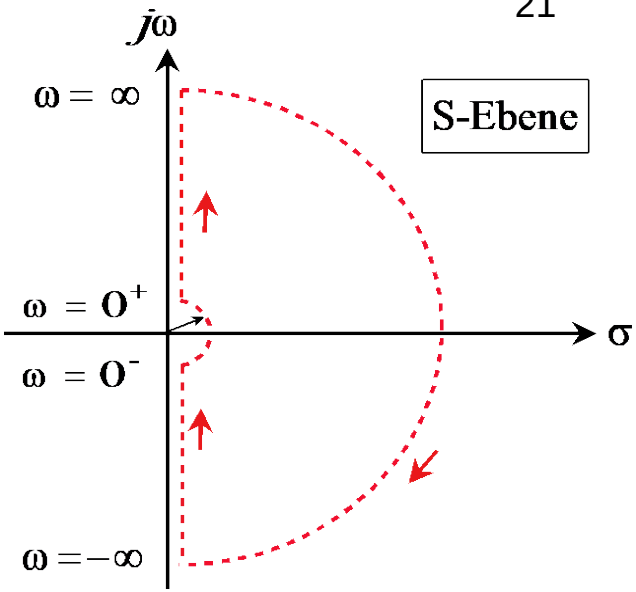
Am Punkt A: $\omega = \pm 1$

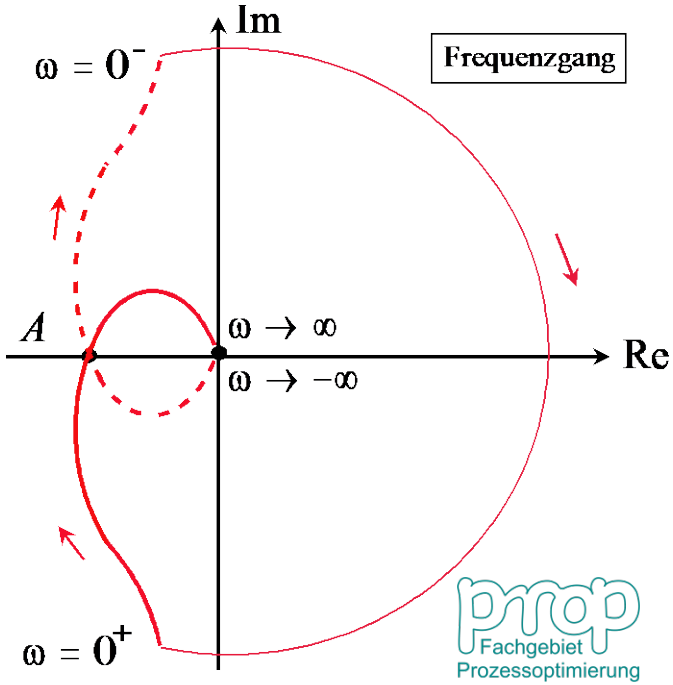
$$G_0(\omega = \pm 1) = -1{,}5$$

also $N_Z^+ = N_{G_0} = 2$

Das geschlossene System ist instabil.

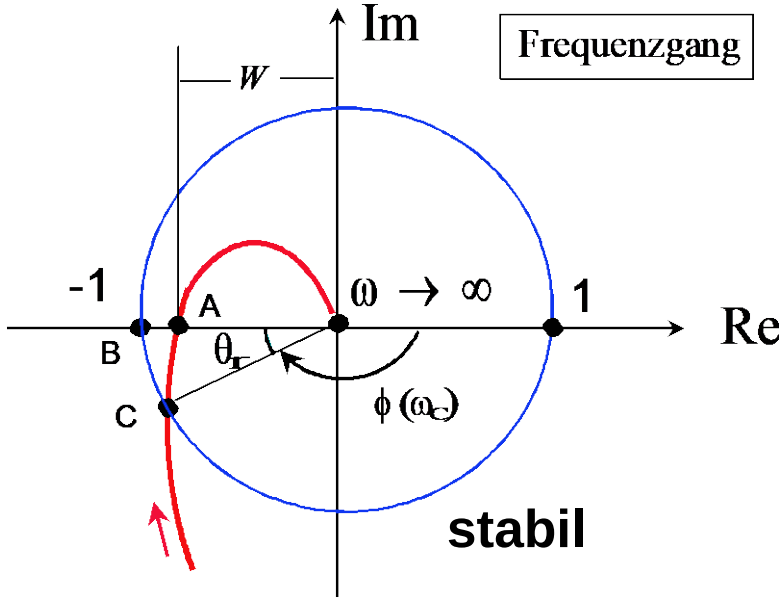
Modifizierte Nyquist-Kurve:

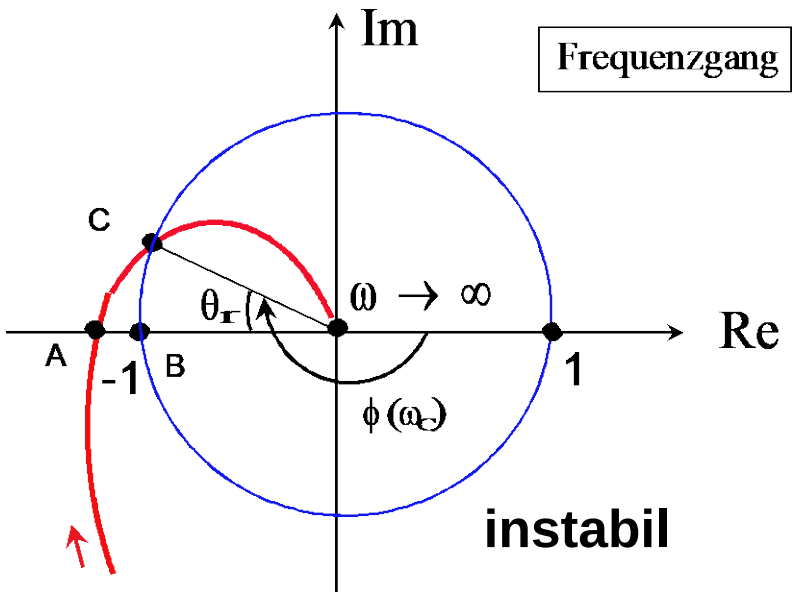




Fachgebiet Prozessoptimierung

Amplitudenrand und Phasenrand





Der kritische Punkt B: $(-1, j0)$

$$G_{0kr}(j\omega) = -1 \quad \Rightarrow \quad |G_{0kr}(j\omega)| = 1, \quad \phi_{kr}(\omega) = -180°$$

Anhand Punkt A berechnet man den Amplitudenrand: $A_r = \frac{1}{W} = \frac{1}{|G(j\omega_A)|}$

Anhand Punkt C berechnet man den Phasenrand: $\theta_r = 180 + \phi(\omega_C)$

Durch A_r und θ_r erkennt man die Entfernung des geschlossenen Systems zu der Stabilitätsgrenze.

Bode-Diagramm

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

Getrennte Betrachtung:

$|G(j\omega)|$: Amplitudengang

$\phi(\omega)$: Phasengang

$|G(j\omega)|$ wird umgerechnet in Dezibel (dB):

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \lg |G(j\omega)|$$

Vorteile:

- Einfache Approximation mit den asymptotischen Linien
- Umformung eines Produkts zu einer Addition
- Nutzung des Logarithmus für beide Achsen

Bode-Diagramm

PT1-Glied: $G(s) = \dfrac{K_P}{T_1 s + 1}, \quad G(j\omega) = \dfrac{K_P}{jT_1\omega + 1} = \dfrac{|K_P|}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}} \angle -\arctan T_1\omega$

Amplitudengang: $|G(j\omega)| = \dfrac{|K_P|}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}}$

Phasengang: $\phi(\omega) = -\arctan T_1\omega$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\lg|K_P| - 20\lg\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}$$ (ein Filter 1. Ordnung)

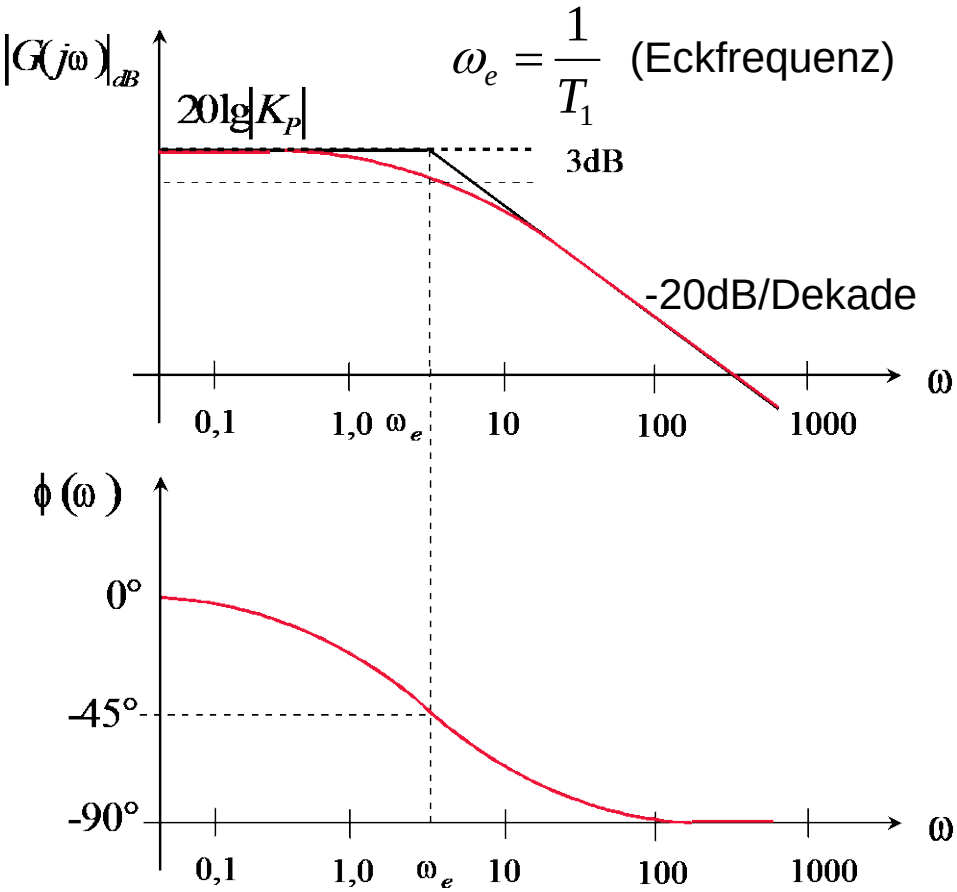
Approximation (asymptotische Linien):

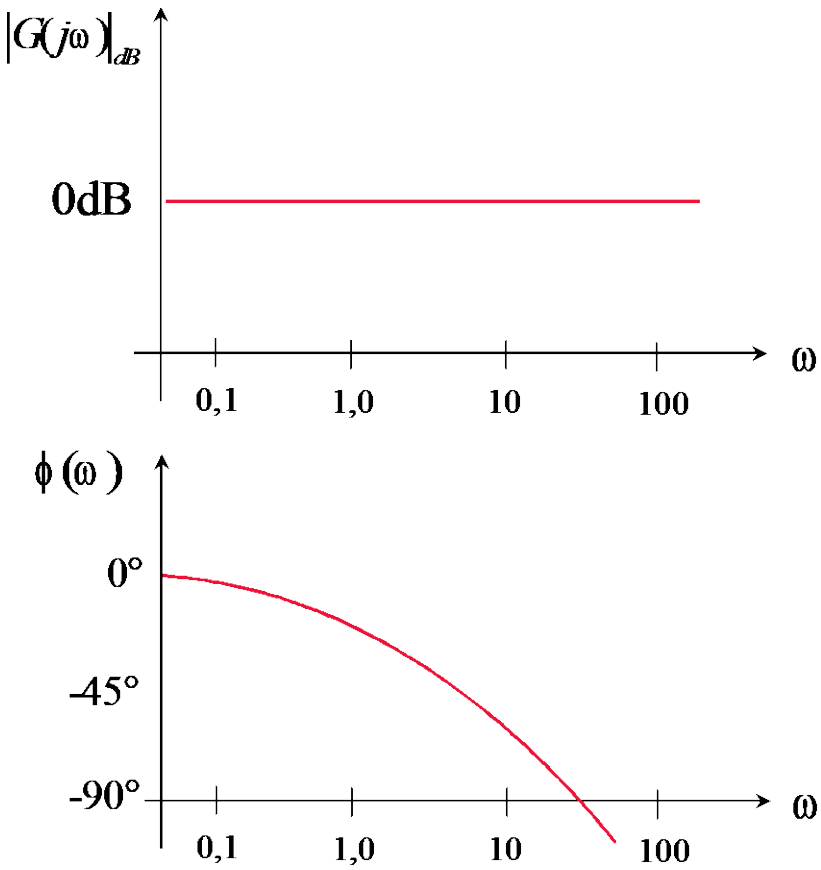
$$T_1\omega << 1, \quad \omega << \frac{1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB} \approx 20\lg|K_P|$$

$$T_1\omega >> 1, \quad \omega >> \frac{1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB} \approx 20\lg|K_P| - 20\lg T_1\omega$$

$$T_1\omega = 1, \quad \omega = \frac{1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20\lg|K_P| - 20\lg\sqrt{2} = 20\lg|K_P| - 3\,dB$$

Bode-Diagramm





Totzeit-Glied: $G(s) = e^{-T_t s} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = e^{-jT_t\omega}$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 0\,dB, \qquad \phi(\omega) = -T_t\omega$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

I-Glied: $G(s) = \dfrac{1}{T_N s} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \dfrac{1}{jT_N\omega} = \dfrac{1}{T_N\omega}\angle -\dfrac{\pi}{2}$

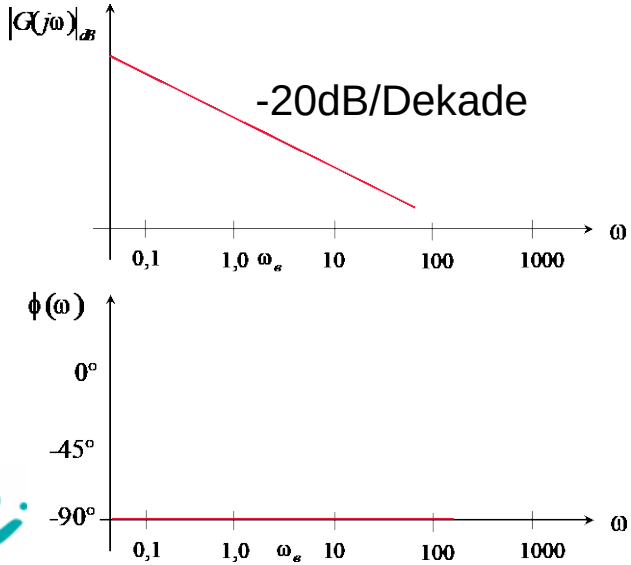
$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = -20\lg T_N\omega, \qquad \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

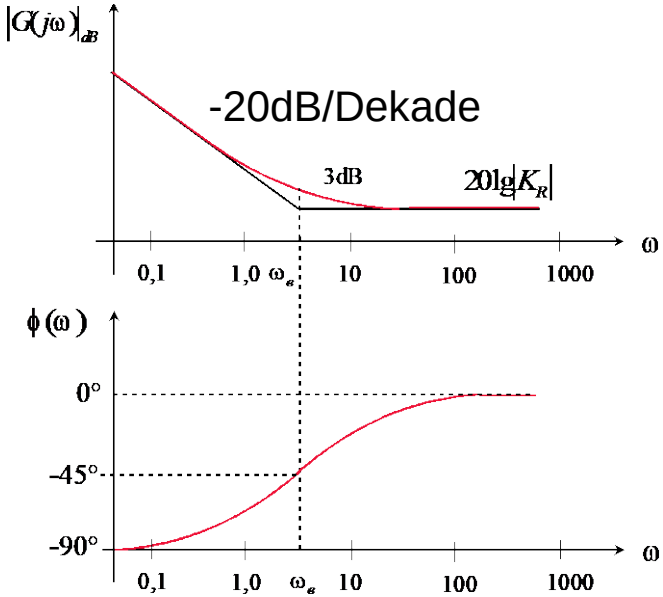
PI-Regler: $G(s) = K_R\left(1+\dfrac{1}{T_N s}\right) \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = K_R\left(1+\dfrac{1}{jT_N\omega}\right)$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\lg K_R + 20\lg\sqrt{1+\frac{1}{T_N^2\omega^2}}, \qquad \phi(\omega) = -\arctan\frac{1}{T_N\omega}$$

$$T_N\omega << 1, \quad \omega << 1/T_N \quad \Rightarrow \quad \left|G(j\omega)\right|_{dB} \approx 20\lg\left|K_R\right| - 20\lg T_N\omega$$

$$T_N\omega >> 1, \quad \omega >> 1/T_N \quad \Rightarrow \quad \left|G(j\omega)\right|_{dB} \approx 20\lg\left|K_R\right|$$





D-Glied: $G(s) = T_V s \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = jT_V\omega = T_V\omega\angle\frac{\pi}{2}$

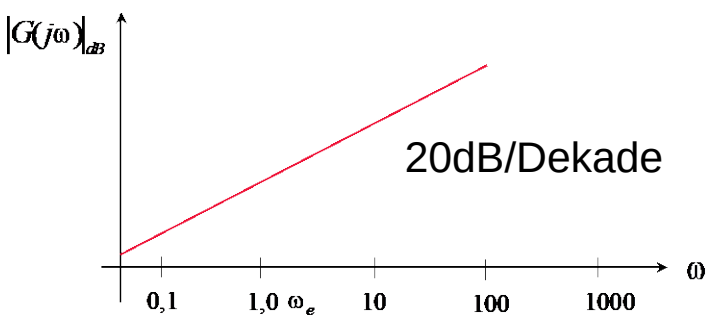
$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\lg T_V\omega, \qquad \phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

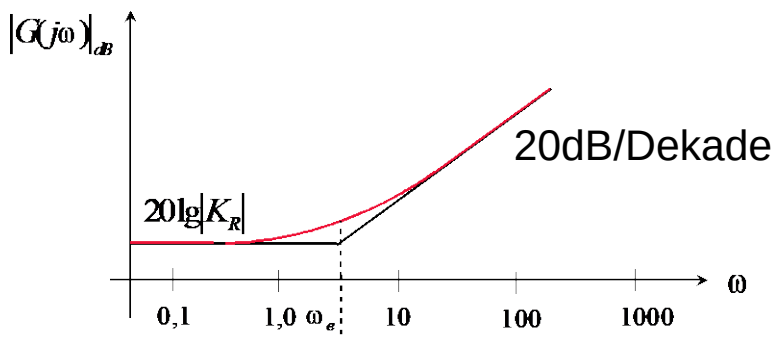
PD-Regler: $G(s) = K_R\left(1 + T_V s\right) \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = K_R\left(1 + jT_V\omega\right)$

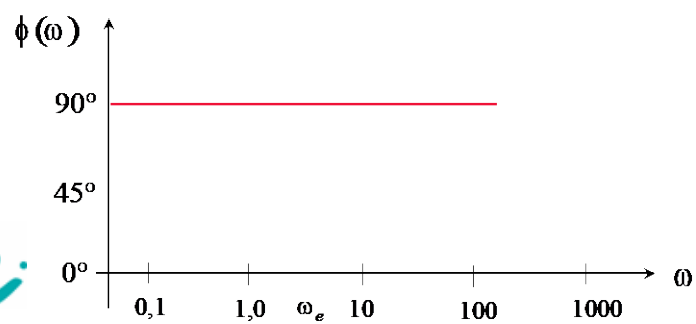
$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\lg K_R + 20\lg\sqrt{1 + T_V^2\omega^2}, \qquad \phi(\omega) = \arctan T_V\omega$$

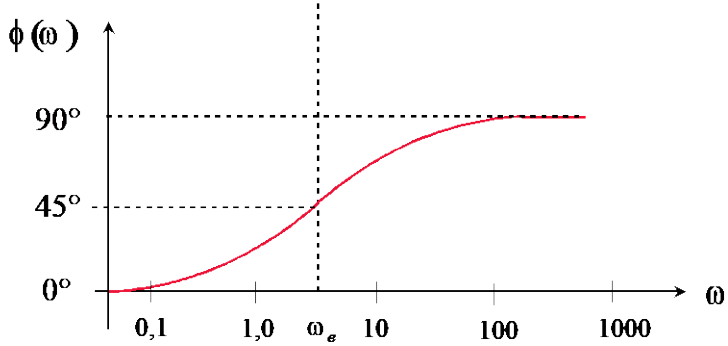
$$T_V\omega << 1, \quad \omega << 1/T_V \quad \Rightarrow \quad \left|G(j\omega)\right|_{dB} \approx 20\lg\left|K_R\right|$$

$$T_V\omega >> 1, \quad \omega >> 1/T_V \quad \Rightarrow \quad \left|G(j\omega)\right|_{dB} \approx 20\lg\left|K_R\right| + 20\lg T_V\omega$$









PT$_2$-Glied: $$G(s)=\frac{K_P}{s^2+2d\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{\left|\tilde{K}_P\right|}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(2d\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},\quad \phi(\omega)=-\arctan\frac{2d\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB}=20\lg\left|\tilde{K}_P\right|-10\lg\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(2d\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}$$

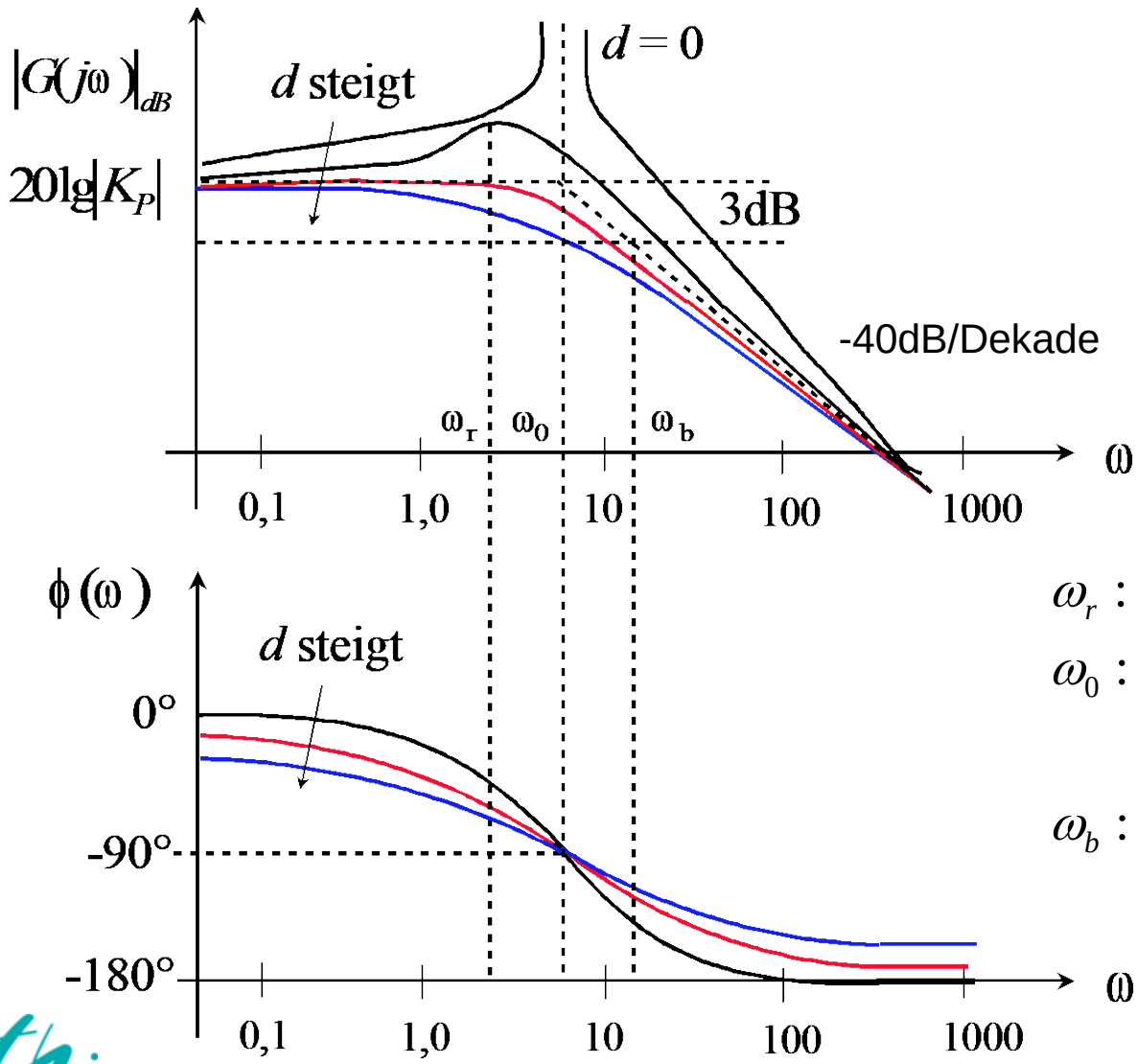
also $$\frac{\omega}{\omega_0}<<1,\quad \omega<<\omega_0\quad\Rightarrow\quad \left|G(j\omega)\right|_{dB}\approx 20\lg\left|\tilde{K}_P\right|,\quad \phi(\omega)\approx 0°$$

$$\frac{\omega}{\omega_0}>>1,\quad \omega>>\omega_0\quad\Rightarrow\quad \left|G(j\omega)\right|_{dB}\approx 20\lg\left|\tilde{K}_P\right|-40\lg\frac{\omega}{\omega_0},\quad \phi(\omega)\approx -180°$$

wenn $$d=0\quad\Rightarrow\quad \left|G(j\omega)\right|_{dB}\approx 20\lg\left|\tilde{K}_P\right|-20\lg\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

$$\omega\to\omega_0\quad\Rightarrow\quad \left|G(j\omega)\right|_{dB}\to\infty,\quad \phi(\omega)=-90°$$

PT2-Glied: $$G(s) = \frac{K_P}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$$



ω_r : Resonanzfrequenz

ω_0 : Eigenfrequenz der ungedämpften Schwungung

ω_b : Bandbreite

Beispiel:

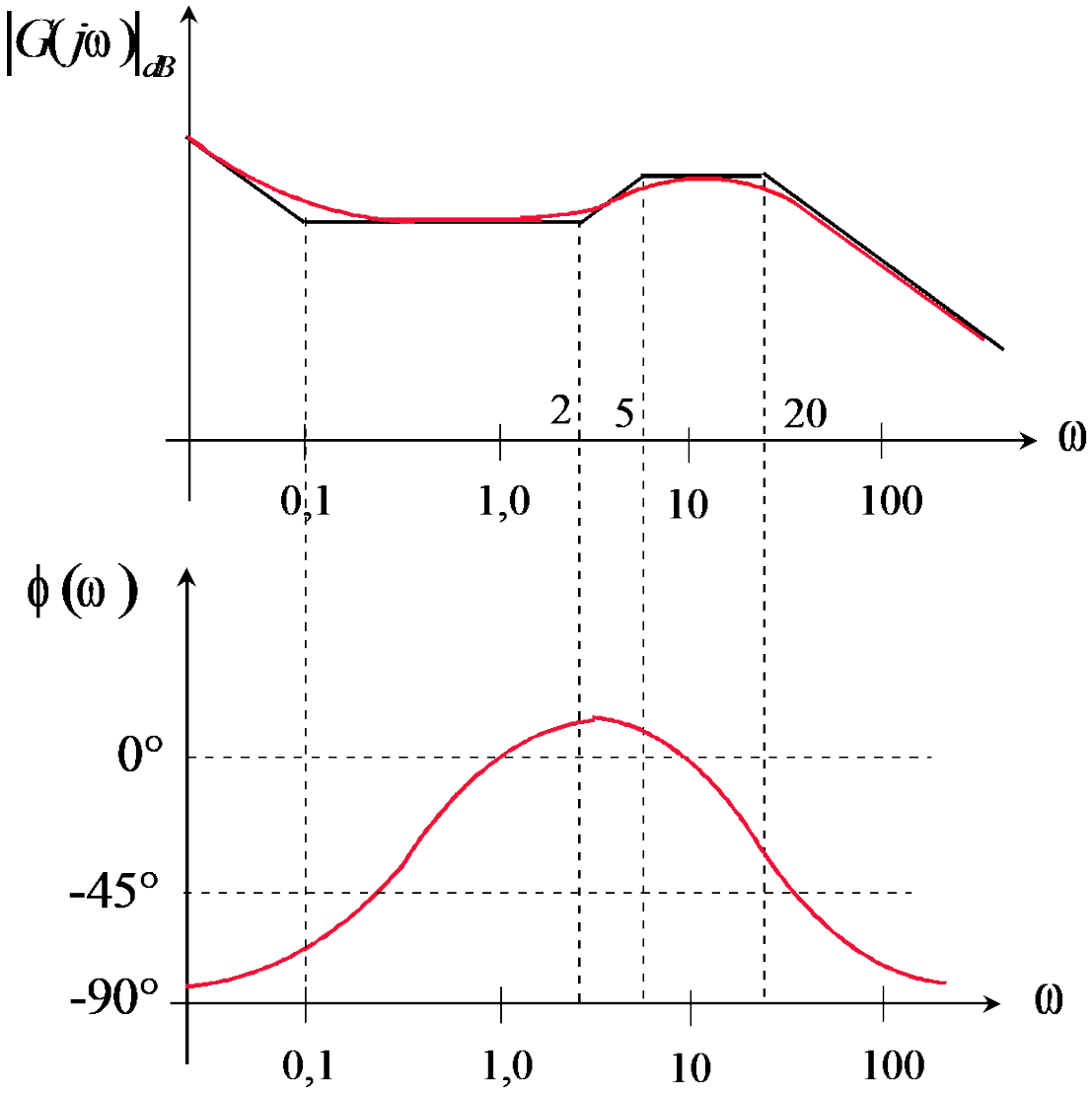
$$G(s) = K_P \frac{(s+0{,}1)(s+2)}{s(s+5)(s+20)}$$

$$G(s) = K_P \frac{0{,}2\left(\frac{s}{0{,}1}+1\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)}{100s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

$$= \frac{K_P}{500} \frac{\left(\frac{s}{0{,}1}+1\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

Eckfrequenzen:

$$\omega_e: \quad 0{,}1, \quad 2, \quad 5, \quad 20$$

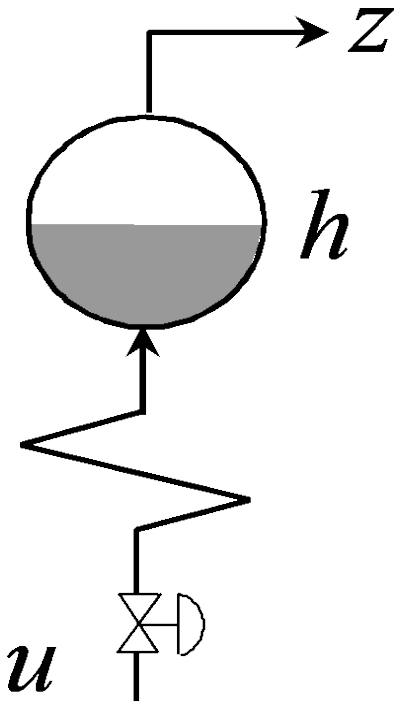


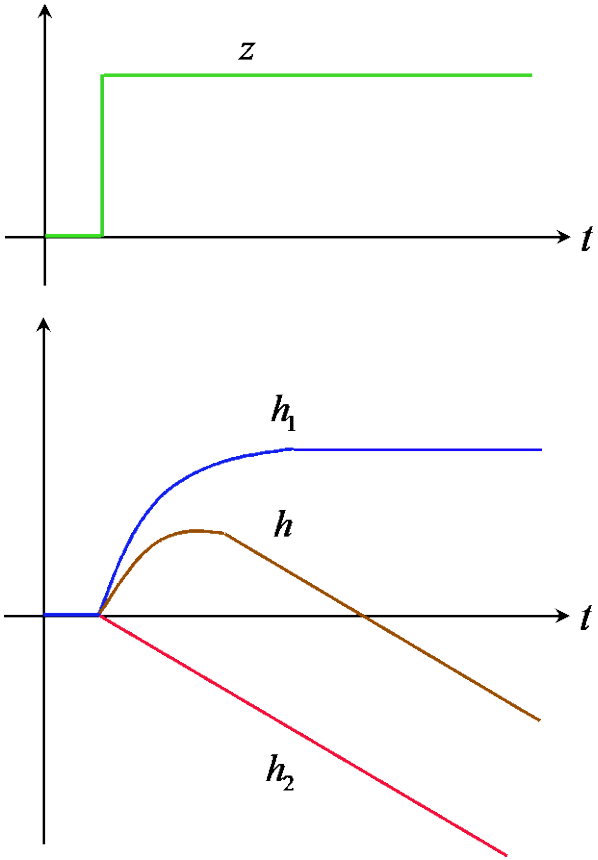
Beispiel: Füllstandregelung eines Verdampfers

Analyse des Prozesses:

Erhöhung des Dampfstroms → Abnahme des Drucks im Verdampfer → Vermehren der Sprudelung → Steigen des Füllstands (h_1, falsche!)

Erhöhung des Dampfstroms → Verringern der Wassermenge im Verdampfer → Abnahme des Füllstands (h_2, tatsächlich!)





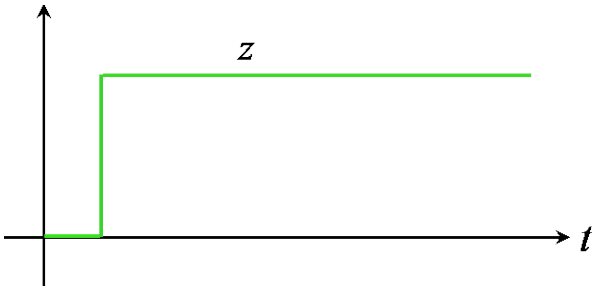
Regelgröße: Füllstand, h

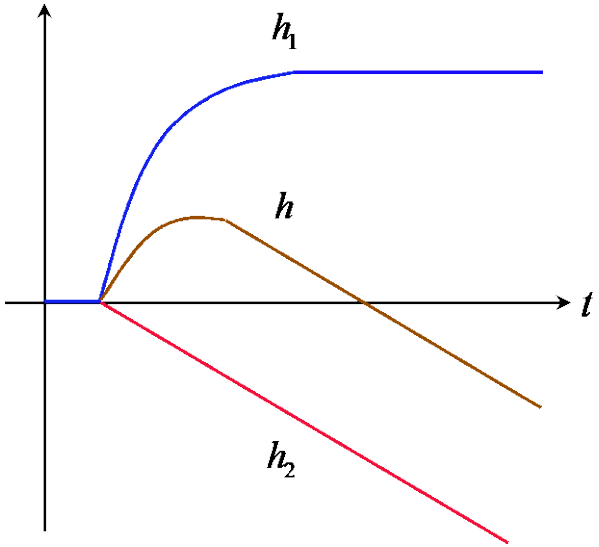
Störgröße: Dampfstrom, z

Stellgröße: Reinwasserstrom, u

Dieses Verhalten führt zu Schwierigkeiten bei der Regelung!

Minimal- und Nichtminimalphasensysteme





also $\quad h = h_1 + h_2$

$$\frac{H(s)}{Z(s)} = \frac{H_1(s)}{Z(s)} + \frac{H_2(s)}{Z(s)}$$

$$= \frac{k_1}{T_1 s + 1} - \frac{k_2}{s} = \frac{s k_1 - k_2 (T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)}$$

$$= \frac{(k_1 - k_2 T_1) s - k_2}{s(T_1 s + 1)}$$

Es gibt eine Nullstelle auf der Rechtseite der S-Ebene. Das nennt man ein Nichtminimalphasensystem.

Darstellung eines Nichtminimalphasensystems:

$$G(s) = \frac{(s - z_0) A(s)}{B(s)}, \quad z_0 > 0$$

Fachgebiet Prozessoptimierung

Minimal- und Nichtminimalphasensysteme

Offene Kette: $$G_0(s) = \frac{(s - z_0)A(s)}{B(s)}, \quad z_0 > 0$$

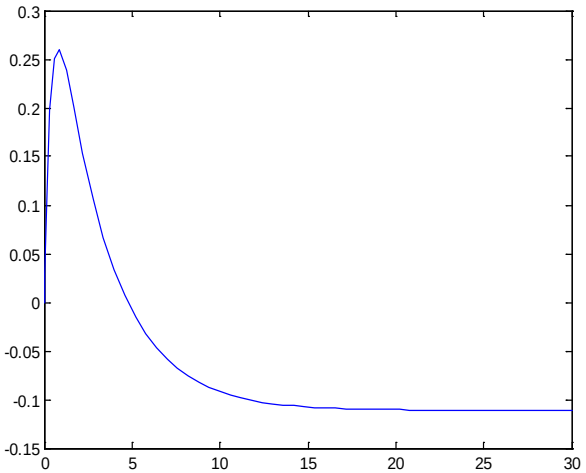
Das geschlossene System: $$G_B(s) = \frac{(s - z_0)A(s)}{B(s) + (s - z_0)A(s)}$$

Die Nullstelle bleibt bei dem geschlossenen System.

Antworten des geschlossenen Systems nach einer Sollwertsprung:

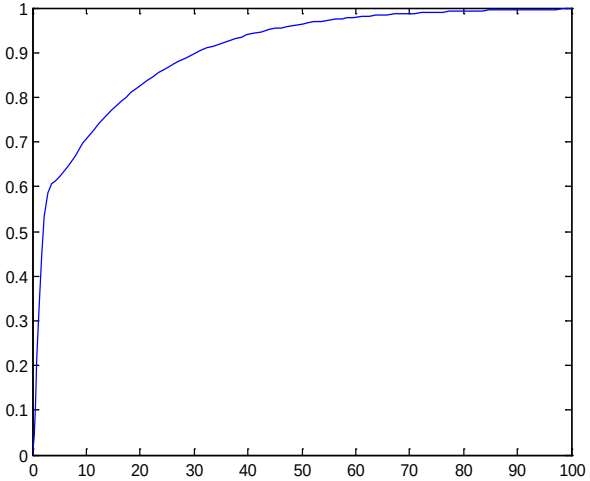
nichtminimalphasig

$$G_0(s) = \frac{(s - 0{,}1)}{(s+1)^2}$$



minimalphasig

$$G_0(s) = \frac{(s + 0{,}1)}{(s+1)^2}$$



Fachgebiet Prozessoptimierung

Minimal- und Nichtminimalphasensysteme

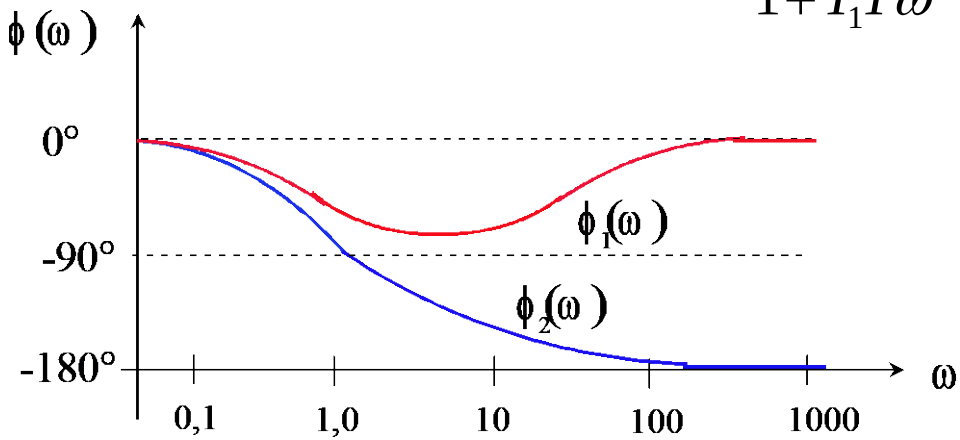
Unterschied zwischen minimalphasigen und nichtminimalphasigen Systemen:

$$G_1(s) = \frac{1+Ts}{1+T_1 s}, \qquad G_2(s) = \frac{1-Ts}{1+T_1 s}, \qquad T_1 > T$$

Der Frequenzgang: $G_1(j\omega) = \dfrac{1+jT\omega}{1+jT_1\omega}, \qquad G_2(j\omega) = \dfrac{1-jT\omega}{1+jT_1\omega}$

Amplitudengang: $\left|G_1(j\omega)\right| = \left|G_2(j\omega)\right| = \sqrt{\dfrac{T^2\omega^2+1}{T_1^2\omega^2+1}}$

Phasengang: $\phi_1(\omega) = -\arctan\dfrac{(T_1-T)\omega}{1+T_1T\omega^2}, \qquad \phi_2(\omega) = -\arctan\dfrac{(T_1+T)\omega}{1-T_1T\omega^2}$



Das Nichtminimal-phasensystem hat eine Phasenschiebung bis zu 180 °.

Minimal- und Nichtminimalphasensysteme

Weil
$$G_2(s) = \frac{1-Ts}{1+Ts}\,\frac{1+Ts}{1+T_1 s} = G_A(s)\,\frac{1+Ts}{1+T_1 s}$$

Allpassglied:
$$G_A(s) = \frac{1-Ts}{1+Ts}$$

daher
$$\left|G_A(j\omega)\right| = \sqrt{\frac{T^2\omega^2+1}{T^2\omega^2+1}} = 1$$

$$\phi_A(\omega) = -\arctan\frac{2T\omega}{1-T^2\omega^2} = -2\arctan T\omega$$

Allpassglied $G_A(s)$ ist ein Glied mit reiner Phasenschiebung.

Ein Nichtminimalphasenglied $G(s)$ kann dargestellt werden mit

$$G(s) = \frac{(s-z_0)A(s)}{B(s)} = \frac{(s-z_0)}{(s+z_0)}\,\frac{(s+z_0)A(s)}{B(s)} = G_A(s)\,G_m(s)$$

wobei $G_m(s)$ minimalphasig ist.

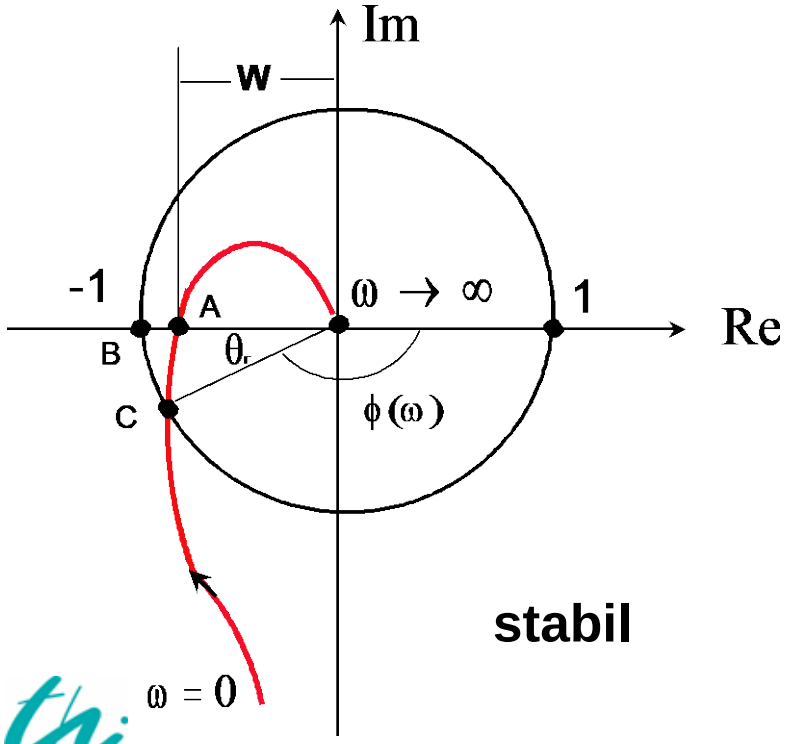
Amplitudenrand und Phasenrand

Der kritische Punkt B: (-1, j0)

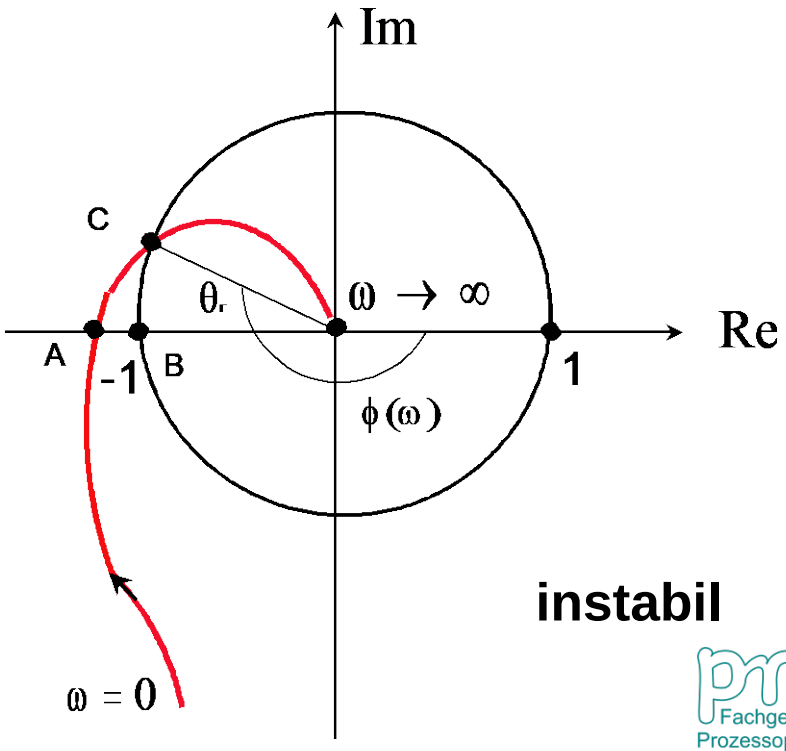
$$G_{0kr}(j\omega) = -1 \quad \Rightarrow \quad |G_{0kr}(j\omega)| = 1, \quad \phi_{kr}(\omega) = -180°$$

Anhand Punkt A berechnet man den Amplitudenrand $A_r = \frac{1}{W} = \frac{1}{|G(j\omega_A)|}$

Anhand Punkt C berechnet man den Phasenrand $\gamma_s = \theta_r = 180 + \phi(\omega_C)$



stabil



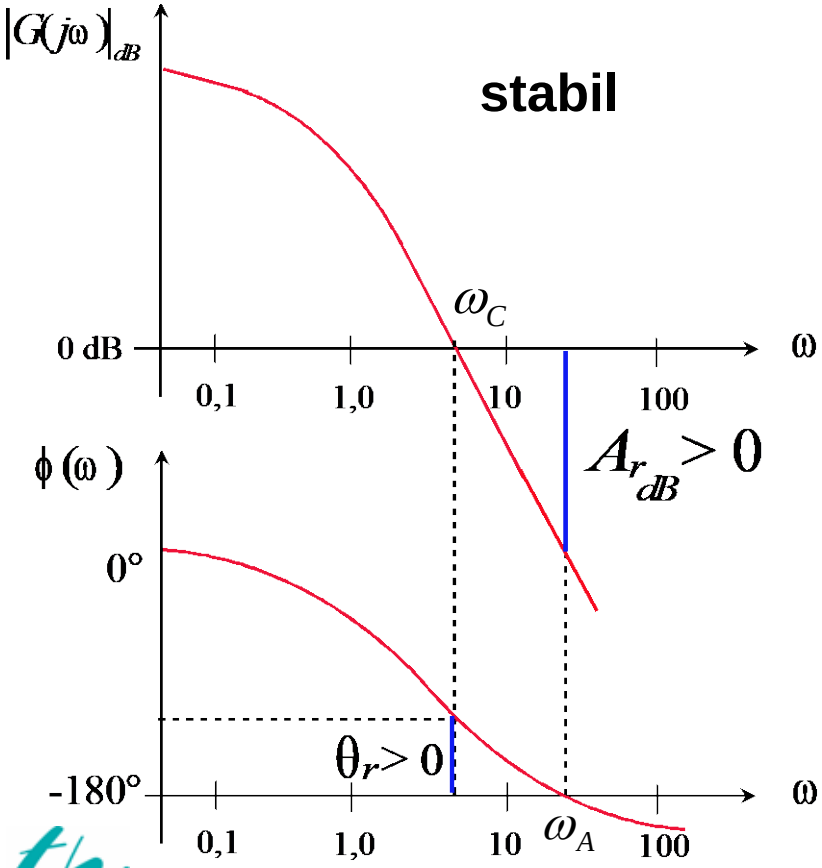
instabil

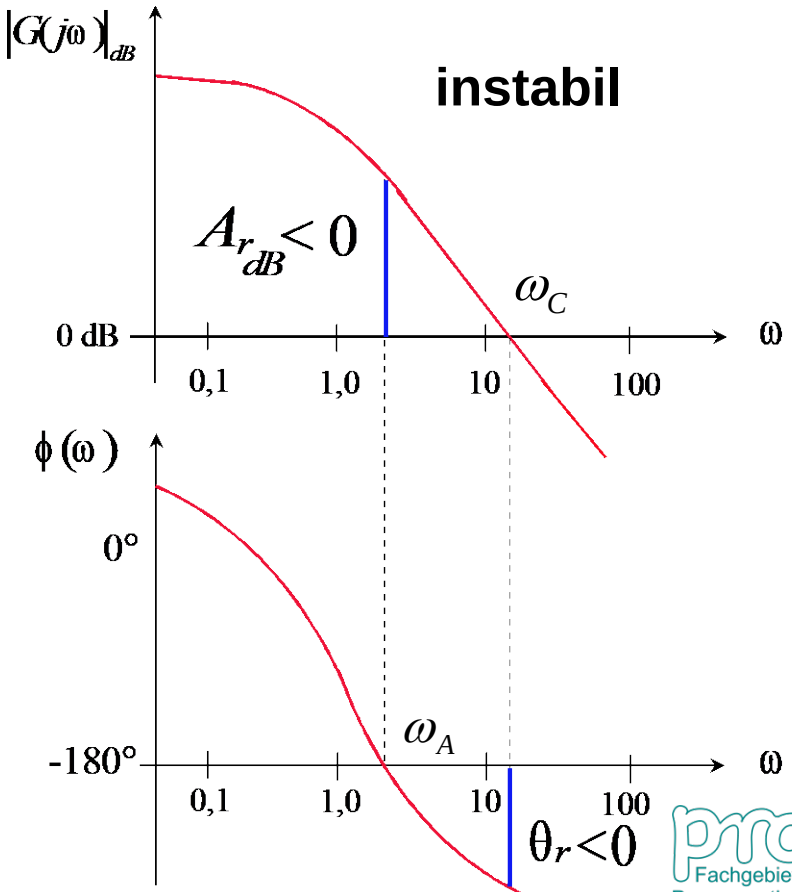
Fachgebiet Prozessoptimierung

Amplitudenrand und Phasenrand

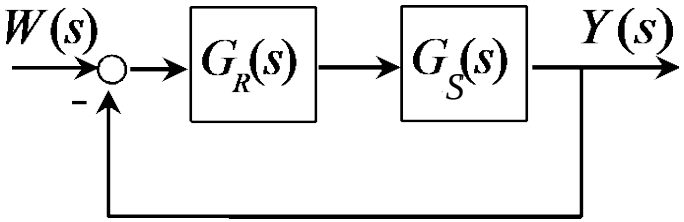
$$\gamma_s = \theta_r = 180 + \phi(\omega_C), \qquad A_r = \frac{1}{W} \quad \Rightarrow \quad A_{r\,dB} = -20\lg W = -20\lg\left|G(j\omega_A)\right|$$

Bedingung eines stabilen Systems: $\gamma_s > 0, \quad A_{r\,dB} > 0$





Reglerauslegung mittels Bode-Diagramm



$$G_0(s) = G_R(s)G_S(s)$$

$$\begin{aligned} \left|G_0(j\omega)\right|_{dB} &= 20\lg\left|G_R(j\omega)G_S(j\omega)\right| \\ &= 20\lg\left|G_R(j\omega)\right| + 20\lg\left|G_S(j\omega)\right| \\ &= \left|G_R(j\omega)\right|_{dB} + \left|G_S(j\omega)\right|_{dB} \end{aligned}$$

$$\angle G_0(j\omega) = \angle G_R(j\omega) + \angle G_S(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \phi_0(\omega) = \phi_R(\omega) + \phi_S(\omega)$$

Der Amplituden- und der Phasengang des Systems können durch den Regler verändert werden, um die gewünschte Regelungsqualität zu erzielen.

Erhöhung des Phasen- und Amplitudenrands (Stabilisieren)

Große Amplitude im Arbeitsfrequenzbereich (Durchgehen)

Kleine Amplitude im Nichtarbeitsfrequenzbereich (Filtern)

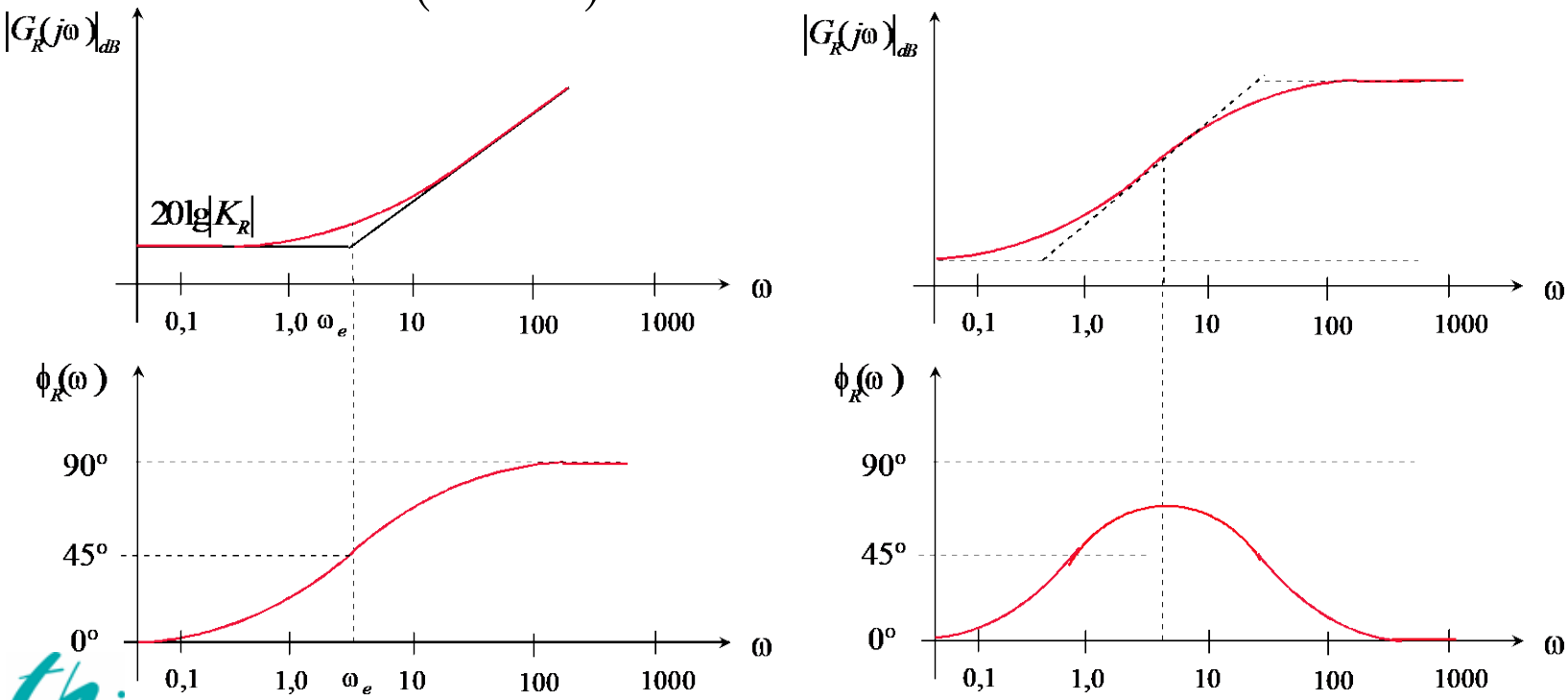
Reglerauslegung mittels Bode-Diagramm

PD-Regler: $G_R(s) = K_R(1 + T_V s)$

Vorteil: Erhöhung des Phasenrands
Nachteil: Große Amplitude bei hoher Frequenz

Kompensator (Anheben der Phase):

$$G_R(s) = K_R \frac{(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)}, \quad \alpha < 1$$



Beispiel: Wirkung eines Kompensators

$$G_S(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Kompensator (Anheben der Phase):

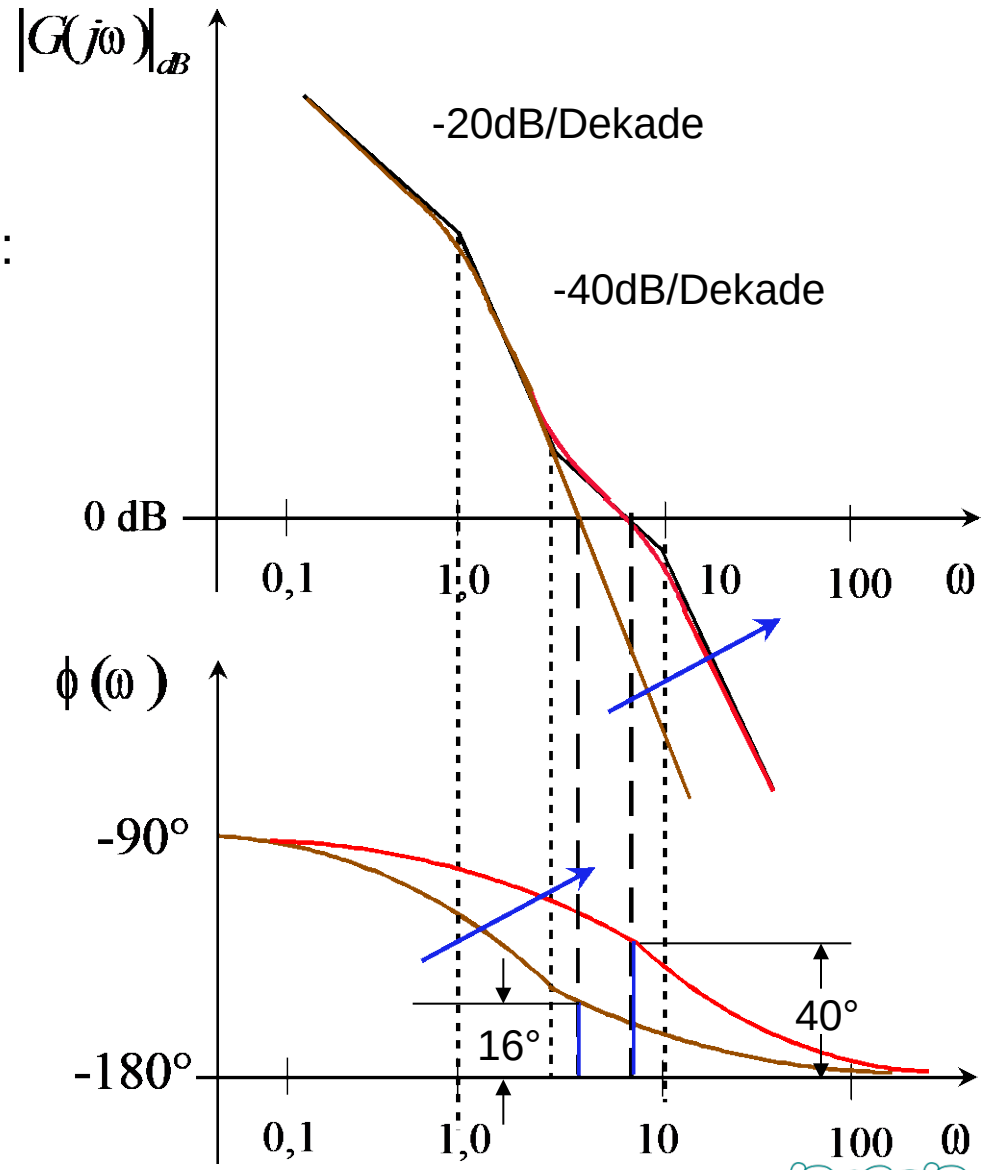
$$G_R(s) = \frac{(1+0,5s)}{(1+0,1s)}$$

$$G_0(j\omega) = 10\frac{(1+j0,5\omega)}{j\omega(j\omega+1)(1+j0,1\omega)}$$

Die Eckfrequenzen:

$$\omega_{e1} = 1, \quad \omega_{e2} = 2, \quad \omega_{e3} = 10$$

Durch die Kompensation wird der Phasenrand von 16° auf 40° erhöht.



Fachgebiet Prozessoptimierung

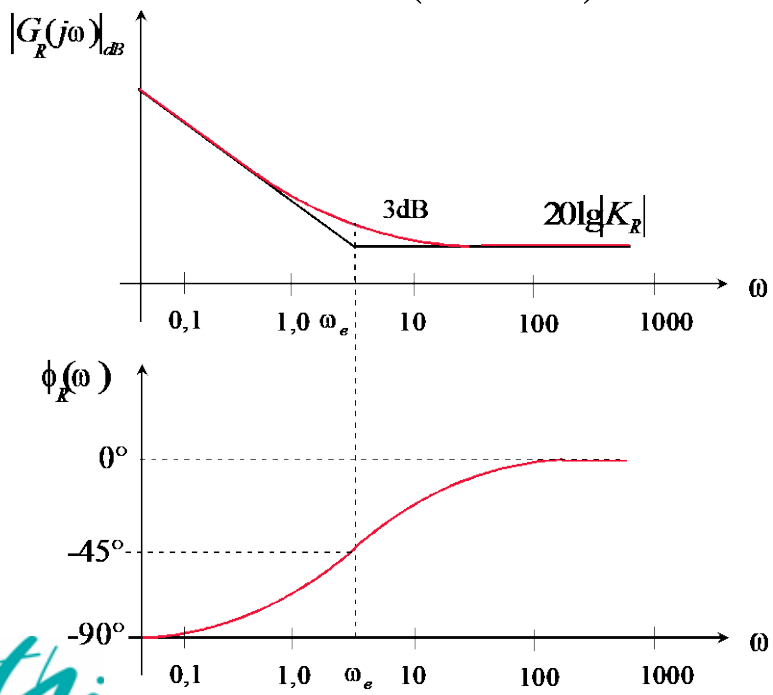
Reglerauslegung mittels Bode-Diagramm

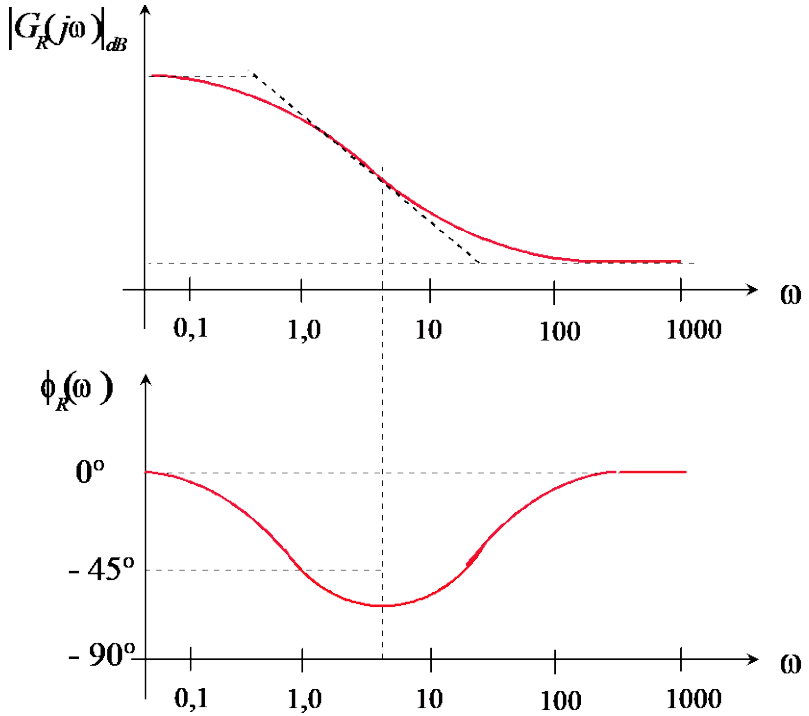
PI-Regler: $$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_N s}\right)$$

Vorteil: Große Amplitude bei kleiner Frequenz (Beseitigung stationärer Fehler)
Nachteil: Reduzierte Phase bei kleiner Frequenz (Verzögerung)

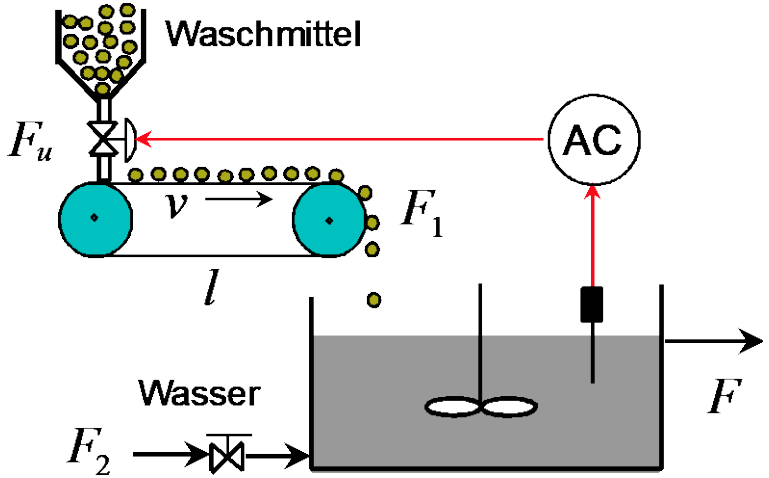
Kompensator (Absenken der Phase):

$$G_R(s) = K_R \frac{(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)}, \quad \alpha > 1$$





Beispiel: Regelung des Mischungsprozesses



$$G_S(s) = \frac{K_S}{T_1 s + 1} e^{-T_t s}$$

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_N s} \right)$$

mit $K_S = 0{,}8, \quad T_1 = 100s, \quad T_t = 10s$

$K_R = 10, \quad T_N = 20s$

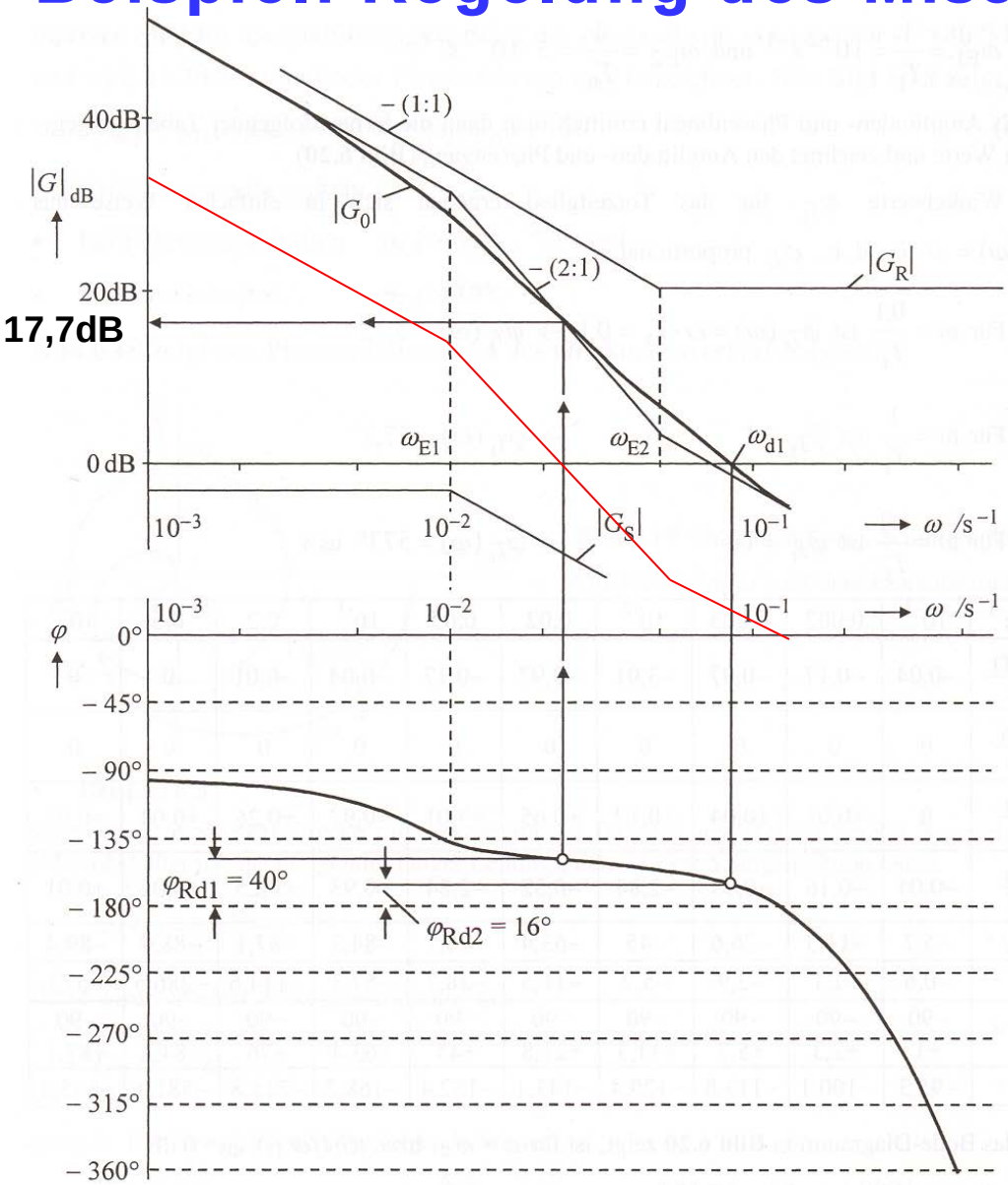
Ist der Regelkreis stabil? Wie groß ist der Phasenrand?

Welchen Wert muss K_R annehmen, wenn der Phasenrand 40° sein soll?

also $$G_0(j\omega) = K_R K_S \frac{jT_N\omega + 1}{jT_N\omega(jT_1\omega + 1)} e^{-jT_t\omega}$$

Die Eckfrequenzen: $$\omega_{e1} = \frac{1}{T_1} = 0{,}01, \quad \omega_{e2} = \frac{1}{T_N} = 0{,}05$$

Beispiel: Regelung des Mischungsprozesses



$$\gamma_S = 180 + \phi(\omega_{d1}) = 16°$$

Der Regelkreis ist stabil.

Um den Phasenrand auf 40° zu erhöhen, muss die Amplitude um 17,7dB reduziert werden, also

$$20\lg 10 - 20\lg \hat{K}_R = 17{,}7$$

$$\Rightarrow \quad \lg \frac{10}{\hat{K}_R} = 0{,}885$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10}{\hat{K}_R} = 7{,}674$$

d. h.

$$\hat{K}_R = 1{,}303$$

Fachgebiet Prozessoptimierung