Statische Prozessoptimierung/ Prozessoptimierung 1

Kapitel 2: Lineare Optimierung

Prof. Dr.-Ing. habil. Pu Li

Fachgebiet Prozessoptimierung

Lineare Algebra (Mathematische Grundlagen)

Beispiel: Produktionsplanung

Produkttyp:	P_1	P_2	P_3	P_4	
Preis:	10	6	12	8	(€/kg)
Energiekosten:	4	3	8	2	(€/kg)
Arbeitskosten:	3	4	1	12	(€/kg)
Produktmenge:	x_1	x_2	x_3	x_4	(t)

Mittel für Energie: 12 T€
Mittel für Arbeit: 10 T€

Problemformulierung:

Gesamtdeckungsbeitrag: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 8x_4$

Einsatz an Produktionsmitteln:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 &\leq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 12x_4 &\leq 10 \end{aligned}$$

Vektor im n-dimensionalen Raum: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Transponierter Vektor: $\mathbf{x}^T = [x_1, \ldots, x_n]$

mxn-Matrix mit Elementen a_{ij}: $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$

Transponierte Matrix: $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$

j-te Spalte der Matrix $\mathbf{A}$: $\mathbf{a}_{\bullet j}$

i-te Zeile der Matrix $\mathbf{A}$: $\mathbf{a}_{i\bullet}^T$

Skalarmultiplikation eines Vektors: $\beta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{bmatrix}$

Inneres Produkt zweier Vektoren: $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$

Produkt einer Matrix mit einem Vektor: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet}^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet}^T\mathbf{x} \end{bmatrix}$

oder $$\mathbf{Ax} = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \ldots \mathbf{a}_{\bullet n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \cdots + x_n \mathbf{a}_{\bullet n}$$

Lineare Kombination: $$y = x_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \cdots + x_n \mathbf{a}_{\bullet n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_{\bullet i}$$

Lineare Unabhängigkeit: $\sum_{i=1} x_i \mathbf{a}_{\bullet i} = 0 \iff x_i = 0$ für alle $i = 1, n$

Rang einer Matrix: α = Maximalzahl linear unabhängiger Spalten
β = Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen

$$\gamma = \min(\alpha, \beta)$$

Basis im *n*-dimensionalen Raum:

Ein Vektorsystem mit n-unabhängigen Vektoren $(\mathbf{a}_{\bullet 1} \cdots \mathbf{a}_{\bullet n})$ ist eine Basis.

Koordinatendarstellung eines Vektors:

$(\mathbf{a}_{\bullet 1} \cdots \mathbf{a}_{\bullet n})$ sei eine Basis, dann $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_{\bullet i}$

$(x_1 \cdots x_n)$ sind die Koordinaten.

Lösung eines linearen Gleichungssystems

n Variablen n Gleichungen: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\bullet 1} & \cdots & \mathbf{a}_{\bullet n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \cdots + x_n \mathbf{a}_{\bullet n}$$

wenn $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\bullet 1} & \cdots & \mathbf{a}_{\bullet n} \end{pmatrix}$ eine Basis bildet, können die Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ gelöst werden, d. h. $\mathbf{A}$ ist invertierbar:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

wobei $\mathbf{A}^{-1}$ die inverse Matrix ist und

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{(Einheitsmatrix)}$$

Geometrische Bedeutung:

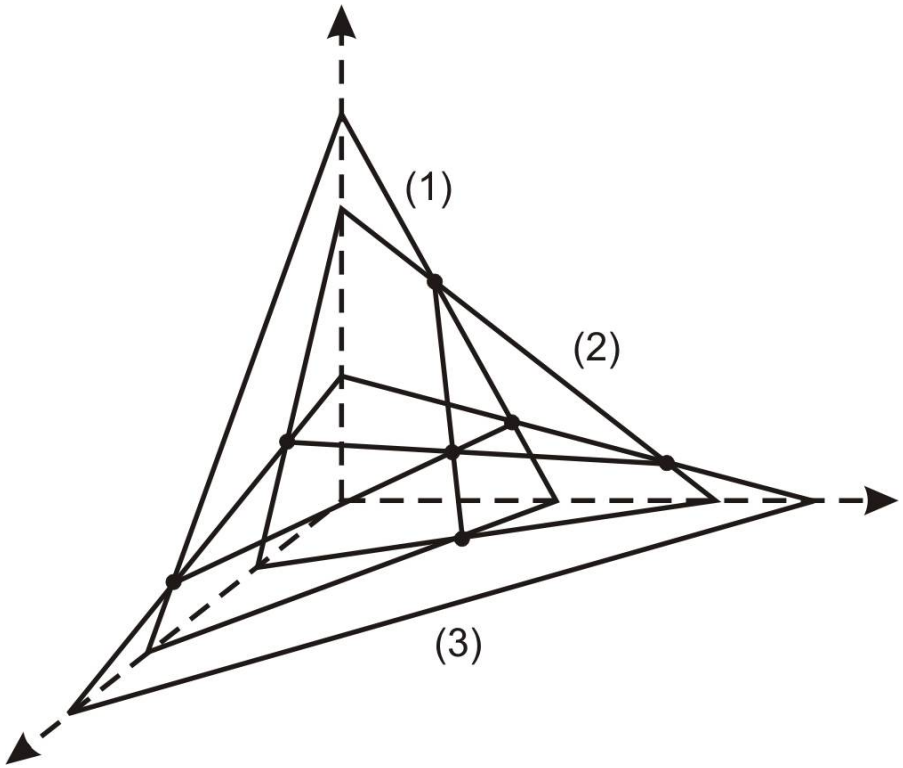
n nichtparallele Flächen (unabhängige lineare Gleichungen) treffen sich im n-dimensionalen Raum an einem Punkt (Kreuzung). Es gibt keine Freiheit, d. h. es gibt nur eine Lösung, keine Optimierungsmöglichkeit.

$$\text{Freiheitsgrad} = N_V - N_G = 0$$

Beispiel: Ein System mit 3 Variablen

Fall I

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$



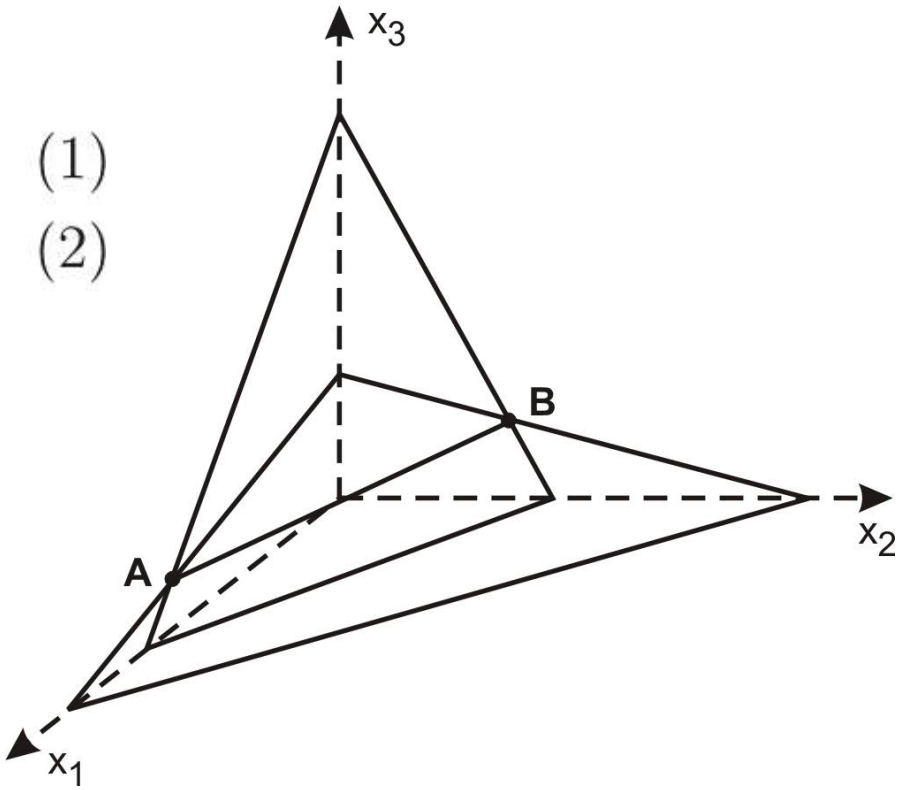
Die Lösung liegt beim Schnittpunkt:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Fall II

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$



Die Lösung kann beliebig auf der Geraden liegen.

Das Ende der Geraden:

$x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 0$

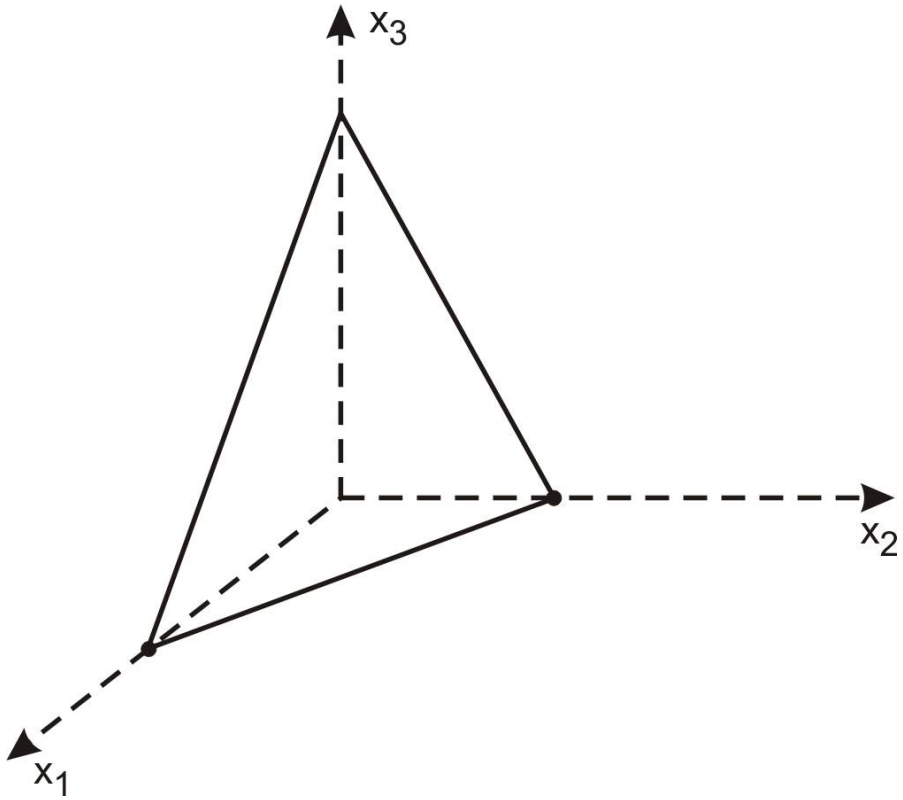
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Fall III

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

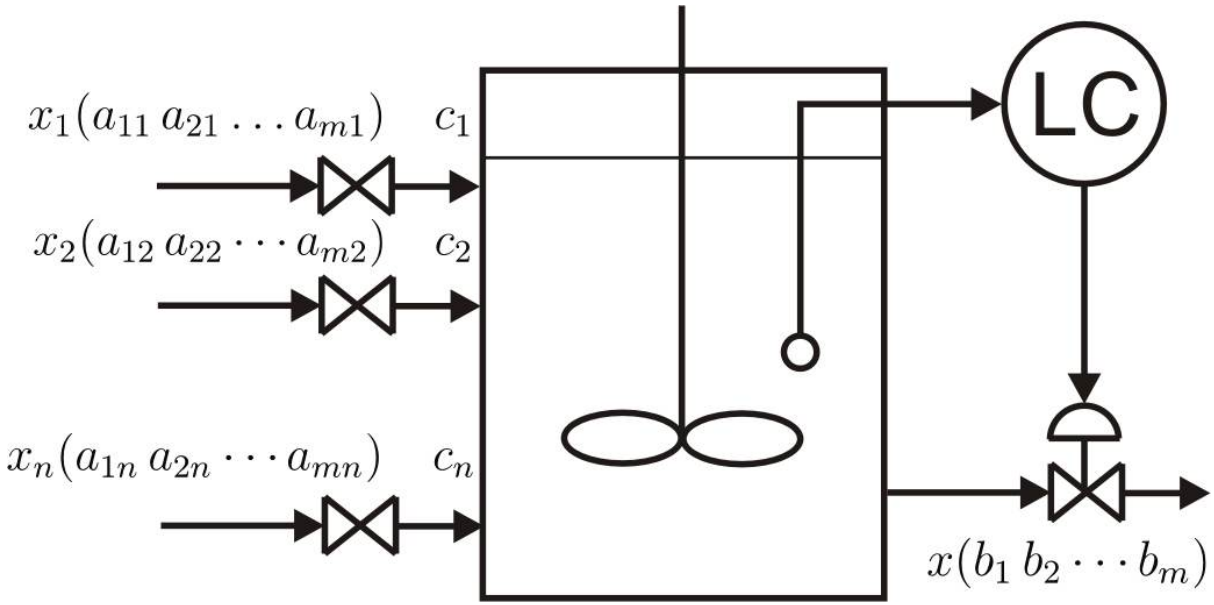


Die Lösung kann beliebig auf der Fläche liegen.

Die Eckpunkte der Fläche:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0 \qquad x_1 = 0,\ x_3 = 0 \qquad x_2 = 0,\ x_3 = 0$$
$$x_3 = \frac{b_1}{a_{13}} \qquad x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} \qquad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Das Mischungsproblem



x_j : Feedstrom (kg/h)

a_{ij} : Konzentration des Feedstroms (kg/kg)

b_i : Spezifikation des Produktstroms

c_j : Preis des Stroms (€/kg)

i : Index der Komponenten

j : Index der Ströme

Strom	Konzentration (kg/kg)	Kosten (€/kg)
1	$a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}$	c_1
2	$a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}$	c_2
$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$
n	$a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$	c_n

Produktspezifikation: $b_1\, b_2 \cdots b_m$

Frage: Wie groß soll jeder Strom x_j sein, damit die Kosten für 1 kg Produkt minimal sind?

Kosten: $\min\limits_{\mathbf{x}} \; f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Komponentenbilanz:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1x$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2x$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_mx$$

Beschränkung der Variablen:

$$x_1,\, x_2, \cdots,\, x_n \geq 0$$

Lineare Programmierung

Standardform eines linearen Programmierungsproblems:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

mit:

$$\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1,\, x_2, \cdots,\, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

Variablen: $\mathbf{x} = \left[x_1\, x_2 \cdots x_n\right]^T$

Gleichungen: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

Parameter: $\mathbf{c} = \left[c_1\, c_2 \cdots c_n\right]^T$

$\mathbf{b} = \left[b_1\, b_2 \cdots b_m\right]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Standardisierung eines nicht standardisierten Problems:

- Wenn Maximierung der Zielfunktion: $\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$

  dann $\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}}[-f(\mathbf{x})]$

- Wenn $x_i \leq 0$, dann setzt man einfach: $x_i' = -x_i \geq 0$

  bzw. $x_i = -x_i' \leq 0$

- Wenn x_i unbeschränkt, dann Einführung zweier neuer Schlupfvariablen:

  $x_j \geq 0,\ x_k \geq 0$ damit $x_i = x_j - x_k$

- Wenn $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ vorhanden,

  auch Einführung einer Schlupfvariablen: $x_{n+1} \geq 0,$

  damit $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$

- Wenn $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ vorhanden,

  auch Einführung einer Schlupfvariablen: $x_{n+1} \geq 0,$

  damit $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$

Beispiel:

$$\max_{\mathbf{x}} \quad [-x_1 + 2x_2 - 3x_3]$$

mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7 && (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 2 && (2) \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 && (3) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- **Zielfunktion:**

d. h.

$$\min_{\mathbf{x}} \quad [-f(\mathbf{x})] = \max_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x})$$

$$\min_{\mathbf{x}} \quad [x_1 - 2x_2 + 3x_3]$$

- **Variablen:**

zwei neue Variablen $x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ für x_3:

$$x_3 = x_4 - x_5 \ ,$$

die in die Zielfunktion und Nebenbedingungen eingesetzt werden.

- **Nebenbedingungen:**

eine Variable $x_6 \geq 0$ für (1): $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 7$

eine Variable $x_7 \geq 0$ für (2): $x_1 - x_2 + x_3 - x_7 = 2$

beide Seiten von (3) mit −1 multiplizieren: $-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$

Das Problem in Standardform:

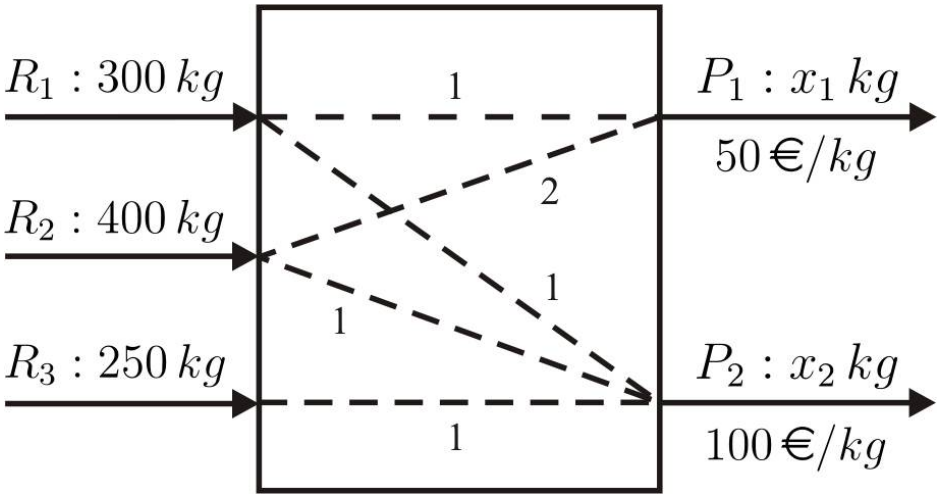
$$\min_{\mathbf{x}} \quad [x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5]$$

mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 &= 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 &= 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_4 &\geq 0, \\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Produktionsplanung eines Betriebes:

Verhältnis: $\dfrac{R\,(kg)}{P\,(kg)}$



Frage: Wieviel P_1 und P_2 sollen hergestellt werden, damit man den maximalen Profit erhalten kann?

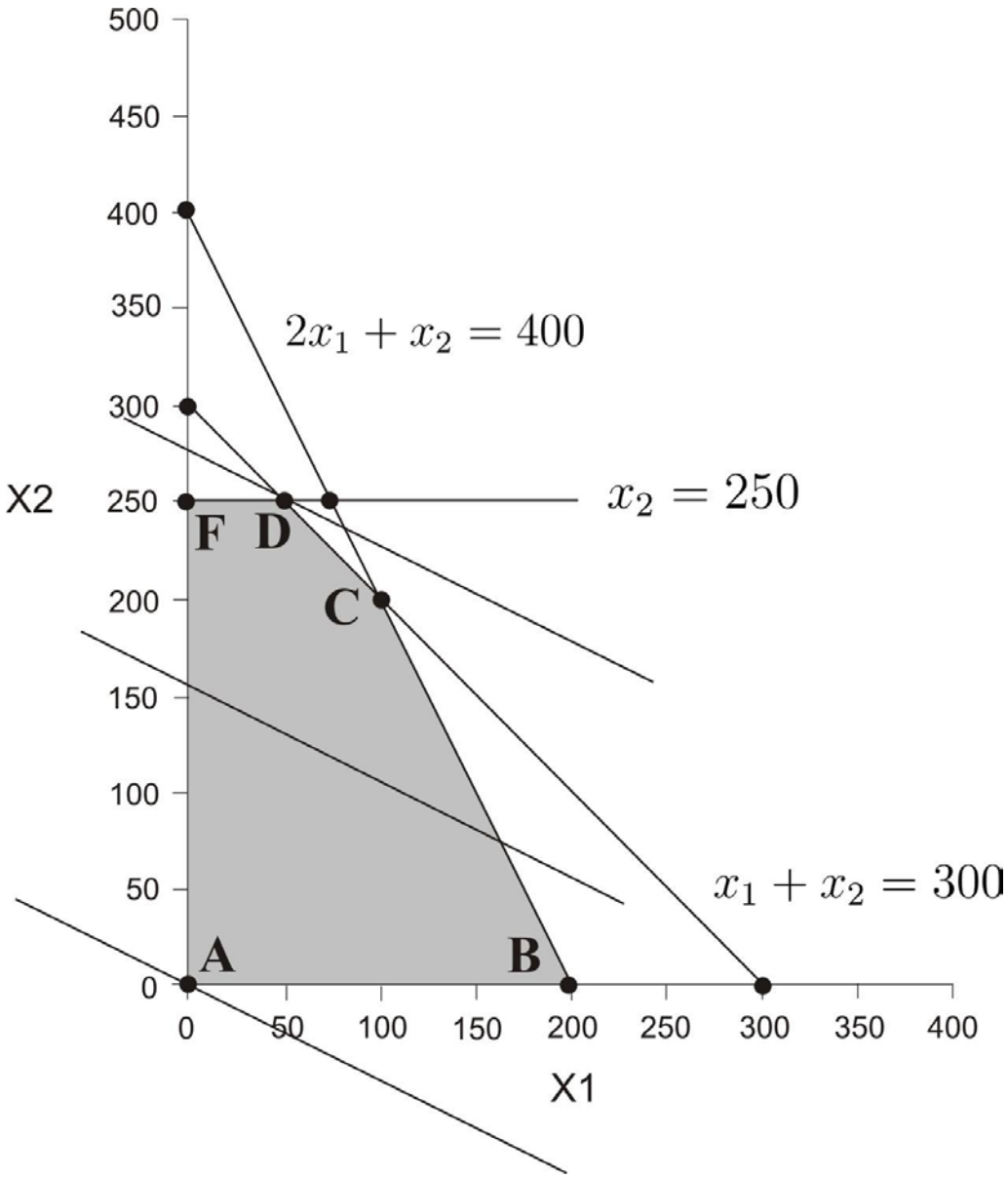
Problemformulierung:

$$\max_{\mathbf{x}} \quad f(x_1, x_2) = \max_{\mathbf{x}} \; [50x_1 + 100x_2]$$

mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 300 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_2 &\leq 250 \\ x_1 \geq 0,\; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Grafische Darstellung: Produktionsplanung



Lösung (Punkt D):

$$x_1 = 50, \; x_2 = 250$$

Probleme mit Gleichungen und Ungleichungen

$$\min_{\mathbf{u}} \quad [\mathbf{c}_1^T\mathbf{x} + \mathbf{c}_2^T\mathbf{u}]$$

mit

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} = \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \geq \mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{x} \geq 0, \;\; \mathbf{u} \geq 0$$

$\mathbf{x}$ – Zustandsvariablen (abhängige Variablen)

$\mathbf{u}$ – Steuervariablen (unabhängige Variablen)

Achtung: Die Anzahl der abhängigen Variablen ist immer gleich der Anzahl der Gleichungen, daher $\mathbf{x} = \mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{u})$

Das Problem ist nun:

$$\min_{\mathbf{u}} \quad [\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b}_1 + (\mathbf{c}_2^T - \mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}_1)\mathbf{u}]$$

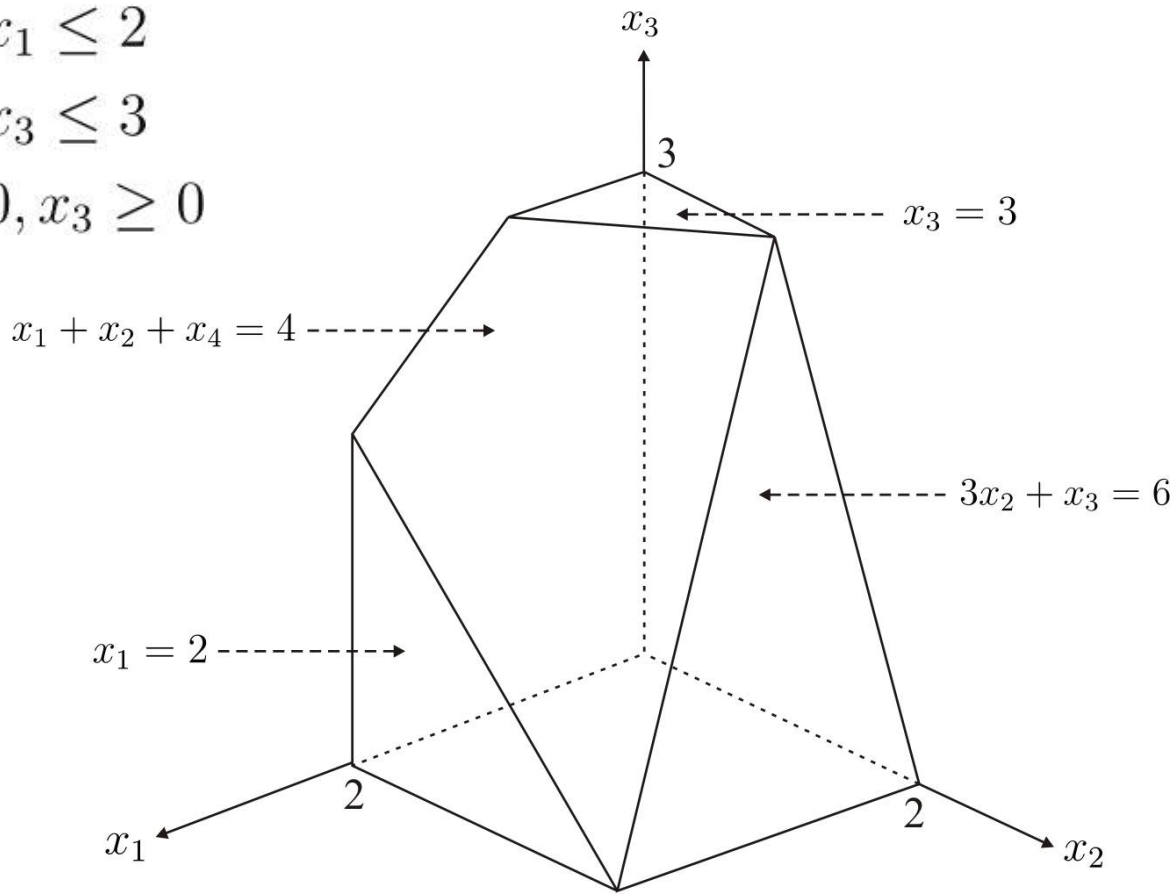
mit

$$\mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{u}) \geq 0$$
$$\mathbf{A}_2\,\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \geq \mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{u} \geq 0$$

Es gibt nur Ungleichungsnebenbedingungen.
Die Nebenbedingungen bilden im Raum der unabhängigen Variablen einen zulässigen Bereich.

Darstellung des zulässigen Bereiches aus den folgenden Ungleichungen:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$
$$3x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_3 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$



Lösungsmethoden der linearen Programmierungsprobleme

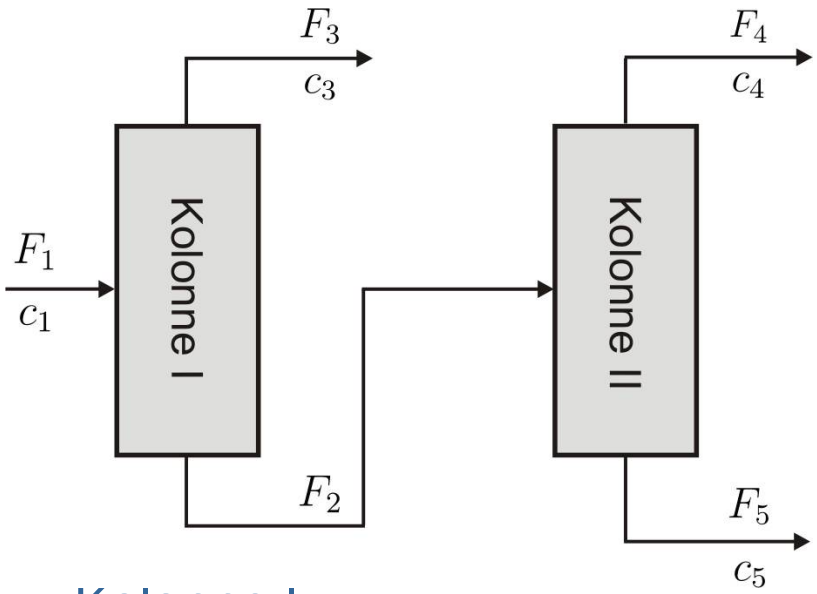
Graphisches Verfahren für zwei Variablen

In der $x_1 - x_2$ −Ebene:

- Die Nebenbedingungen bilden einen zulässigen Bereich, in dem die Lösung gefunden werden soll.
- Die Zielfunktion kann durch Niveaulinien dargestellt werden.
- Die Lösung befindet sich an der Grenze/am Rand des zulässigen Bereiches.
- Es gibt vier Fälle der optimalen Lösungen:

  1. eine einzige Lösung;
  2. zahllose Lösungen;
  3. Lösungen im Unendlichen;
  4. keine Lösung.

Beispiel: Optimierung eines Kolonnensystems



Betriebskosten:
für jede Kolonne 1,25 €/kg Feed

Kolonne I:

$F_1 \leq 2000$ kg/d $\quad F_2 = 0,6\,F_1 \quad F_3 = 0,4\,F_1$

$c_1 = 42$ €/kg $\quad c_3 = 53$ €/kg

Kolonne II:

$200 \leq F_4 \leq 400$ kg/d $\quad 0,5 \leq \frac{F_4}{F_2} \leq 0,7 \quad 0,3 \leq \frac{F_5}{F_2} \leq 0,5$

$c_4 = 68$ €/kg $\quad c_5 = 42$ €/kg

Ziel der Optimierung: Maximierung des Profits mit den optimalen Variablen $F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ F_5$

Optimierungsproblem:

$$\max_{F_1 \cdots, F_5} \quad \{\text{Profit}(F_1,\, F_2,\, F_3,\, F_4,\, F_5)$$
$$= c_3 F_3 + c_4 F_4 + c_5 F_5 - c_1 F_1 - c_{K1} F_1 - c_{K2} F_2\}$$

Nebenbedingungen:

- Massenbilanzen:

$$F_1 = F_3 + F_4 + F_5 \qquad (1)$$
$$F_2 = 0,6\, F_1 \qquad (2)$$
$$F_3 = 0,4\, F_1 \qquad (3)$$
$$F_2 = F_4 + F_5 \qquad (4)$$

- Prozessbeschränkungen:

$$0,5 \leq \frac{F_4}{F_2} \leq 0,7$$
$$0,3 \leq \frac{F_5}{F_2} \leq 0,5$$

- Beschränkungen der Variablen:

$$F_1 \leq 2000$$
$$200 \leq F_4 \leq 400$$
$$F_1,\, F_2,\, F_3,\, F_4,\, F_5 \geq 0$$

Analyse des Freiheitsgrades:

5 Variablen, 3 linear unabhängige Gleichungen
Ungleichungen haben keinen Einfluss auf den Freiheitsgrad

$$FG = 5 - 3 = 2$$

d. h. das Problem kann mit einem System mit 2 Variablen umformen

$$F_2 = F_4 + F_5 \qquad (4)$$

$$F_2 = F_4 + F_5 = 0,6\,F_1$$

$$F_1 = \frac{1}{0,6}(F_4 + F_5) \qquad (5)$$

$$F_3 = 0,4\,F_1 = \frac{0,4}{0,6}(F_4 + F_5) \qquad (6)$$

Die Ungleichungen:

$$0,5\,F_2 \leq F_4 \leq 0,7\,F_2$$

$$0,3\,F_2 \leq F_5 \leq 0,5\,F_2$$

Das bedeutet:

$$0,5\,F_2 \leq F_4; \qquad F_4 \leq 0,7\,F_2$$

$$0,3\,F_2 \leq F_5; \qquad F_5 \leq 0,5\,F_2$$

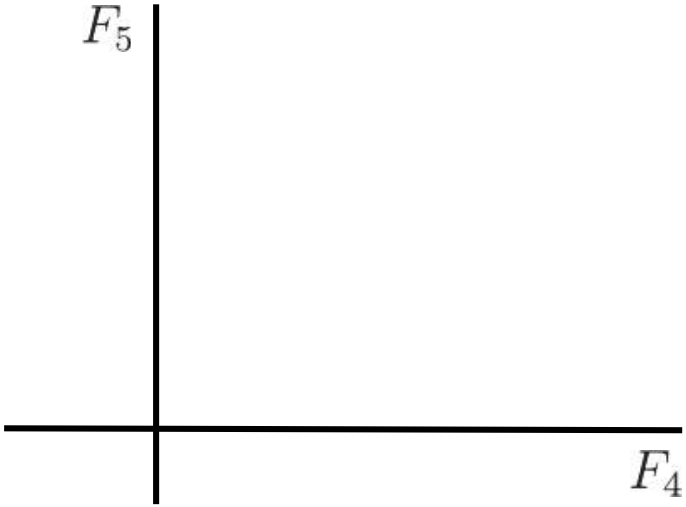
Nach der Umformung:

$$\max_{F_4,\,F_5} \quad [30F_4 + 4F_5]$$

mit

$$F_4 - F_5 \geq 0$$
$$3F_4 - 7F_5 \leq 0$$
$$F_4 + F_5 \leq 1200$$
$$200 \leq F_4 \leq 400$$
$$F_4 \geq 0 \quad F_5 \geq 0$$

Hausaufgabe: Lösung des Problems mit dem grafischem Verfahren



Lösungsmethoden der linearen Programmierungsprobleme

Simplexverfahren für mehrere Variablen:

Im n-dimensionalen Raum:

- Die Nebenbedingungen bilden ein zulässiges Polyeder, in dem die Lösung gefunden werden soll.
- Die Zielfunktion kann durch parallele Niveauflächen dargestellt werden.
- Die einzige Lösung befindet sich an einem der Eckpunkte des Polyeders.
- Die Eckpunkte entsprechen den **Basislösungen** eines standardisierten linearen Programmierungsproblems.
- Die optimale Lösung wird von einer Basislösung zu einer anderen Basislösung gesucht, damit die Zielfunktion reduziert werden soll.

Lineare Programmierung

Standardform eines linearen Programmierungsproblems:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

mit:

$$\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1,\, x_2, \cdots,\, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

Variablen: $\mathbf{x} = \left[x_1\, x_2 \cdots x_n\right]^T$

Gleichungen: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

Parameter: $\mathbf{c} = \left[c_1\, c_2 \cdots c_n\right]^T$

$\mathbf{b} = \left[b_1\, b_2 \cdots b_m\right]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Zerlegung des Problems:

$$\min_{\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N} \quad [\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N]$$

mit $\quad \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \;\; \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}_B$: m Basisvariablen

$\mathbf{x}_N$: $n - m$ Nichtbasisvariablen

Achtung: viele Auswahlmöglichkeiten von $\mathbf{x}_B$ und $\mathbf{x}_N$

Weil

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A_N x_N})$$

dann

$$\min_{\mathbf{x}_N} \quad [\mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N) \mathbf{x}_N]$$

mit $\quad \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N) \geq \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

Die Ungleichungsnebenbedingungen bilden im Raum $\mathbf{x}_N$ einen zulässigen Bereich (Polyeder). Die einzige Lösung befindet sich an einem Eckpunkt. Aber die Eckpunkte sind schwer zu identifizieren. Daher bewertet man die Schnittpunkte durch

m Gleichungen: $\quad \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N) = \mathbf{0}$

$n - m$ Gleichungen: $\quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0}$

Im $(n-m)$-dimensionalen Raum braucht man $(n-m)$ Gleichungen (Flächen), um einen Schnittpunkt zu berechnen.
D. h. von n Gleichungen wählt man $n-m$ aus. Es gibt insgesamt

$$N_B = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Wahlmöglichkeiten (Schnittpunkte).

$\mathbf{x}_B$: m Variablen: nennt man **Basisvariablen**
$\mathbf{x}_N$: $n-m$ Variablen: nennt man **Nichtbasisvariablen**

Die Lösungen heißen Basislösungen:

Wenn die Nichtbasisvariablen ausgewählt sind, d. h. $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, dann

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A_N x_N}) = \mathbf{A_B^{-1} b}$$

und

$$f = \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$$

Achtung: Die Basislösungen entsprechen den Schnittpunkten.
Sie sind nicht unbedingt zulässig.

Definition der Basislösungen

- Das Gleichungssystem der Nebenbedingungen hat n Variablen und m Gleichungen, $n \geq m$.
- m Variablen (Basisvariablen) werden zur Lösung genommen. $n - m$ Variablen werden Null gesetzt.
- Solche Lösungen heißen Basislösungen. Die maximale Anzahl der Basislösung ist:

$$N_B = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- Das Gleichungssystem hat

  1. keine Lösung, wenn $n < m$;
  2. eine einzige Lösung, wenn $n = m$;
  3. Freiheit für die Optimierung, wenn $n > m$.

Standardform des Planungsproblems:

Produktionsplanung eines Betriebes:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(x) = \min_{\mathbf{x}} \; [-50\,x_1 - 100\,x_2]$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 300 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 400 \\ x_2 + x_5 &= 250 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Nebenbedingungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Eine Basislösung $(x_4 = x_5 = 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 250 \end{pmatrix}$$

dann $x_1 = 75, \;\; x_2 = 250, \;\; x_3 = -25$

d. h. die Lösung ist nicht zulässig.

Anzahl der Basislösungen:

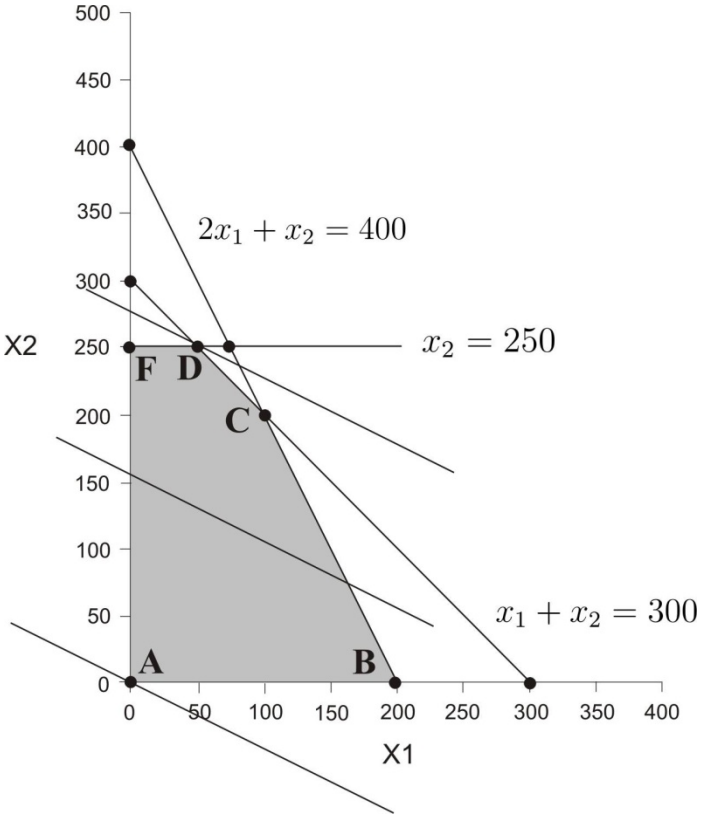
$$NB = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Tabelle der Basislösungen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	P
1	75	250	−25	0	0	–	–
2	50	250	0	50	0	27500	D
3	100	200	0	0	50	25000	C
4	∅	0	∅	∅	0	–	–
5	200	0	100	0	250	1000	B
6	300	0	0	−200	250	–	–
7	0	250	50	150	0	17500	E
8	0	400	450	0	−150	–	–
9	0	300	0	100	−50	–	–
10	0	0	300	400	250	0	A

beim Fall 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 250 \end{bmatrix}$$



Das Simplex-Verfahren

(ein einfaches Beispiel)

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \; [c_1 x_1 + c_2 x_2]$$

$$\text{mit} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

eine Basislösung $(x_2 = 0)$:

$$\mathbf{x}_B^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(\mathbf{x}_B^{(1)}) = c_1 \frac{b}{a_1}$$

Die allgemeine Lösung $(x_2 \neq 0)$: $\qquad x_1 = \dfrac{b - a_2 x_2}{a_1}$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= c_1 \frac{b - a_2 x_2}{a_1} + c_2 x_2 \\ &= c_1 \frac{b}{a_1} - c_1 \frac{a_2 x_2}{a_1} + c_2 x_2 \\ &= c_1 \frac{b}{a_1} - (c_1 \frac{a_2}{a_1} - c_2) x_2 = f(\mathbf{x}_B^{(1)}) - t\, x_2 \end{aligned}$$

wobei der Testwert: $$t = c_1 \frac{a_2}{a_1} - c_2$$

- Wenn $t < 0$, gibt es keine Möglichkeit, beim Tausch der Basis zu $(x_1 = 0,\ x_2 \neq 0)$ die Zielfunktion zu reduzieren.

- Wenn $t > 0$, weil $x_2 \geq 0$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_B^{(1)}) - t\, x_2 < f(\mathbf{x}_B^{(1)})$$

soll die Basis gewechselt werden: $x_1 = 0,\ x_2 \neq 0$

$$\mathbf{x}_B^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{a_2} \end{pmatrix} \qquad f(\mathbf{x}_B^{(2)}) = c_2 \frac{b}{a_2}$$

Man kann auch wie folgt berechnen:

$$f(\mathbf{x}_B^{(2)}) = f(\mathbf{x}_B^{(1)}) - t\, x_2^B$$

D. h. die Berechnung kann iterativ durch Tauschen der Basis durchgeführt werden. Dadurch kann der Wert der Zielfunktion verkleinert werden.

Das Simplex-Verfahren

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{mit} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Beispiel:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad [2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 2x_4 + 4x_5]$$
$$\text{mit} \quad 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 12$$
$$-x_2 + 12x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 20$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, 5$$

die Parametermatrix der Nebenbedingungen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 12 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

eine Basis auswählen:

$$\mathbf{x}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B^{(1^*)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Zum Beispiel sind die Basisvariablen:

$$\mathbf{x}_B^{(1^*)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N^{(1^*)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

die entsprechende Trennung der Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -1 \\ -1 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

aus der Nebenbedingung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B^{(1^*)} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B^{(1^*)} = \mathbf{b}$$

dann ergibt sich für die Basislösung:

$$\mathbf{x}_B^{(1^*)} = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$$

für das Beispielproblem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

und

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

die Zielfunktion:

$$f_B^{(1)} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B^{(1^*)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^{(1^*)} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$$

dann

$$f_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 26$$

die allgemeine Lösung: $(\mathbf{x}_N \neq \mathbf{0})$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$$

aus der Nebenbedingung:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{bmatrix} = \mathbf{A}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

dann

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N$$

die Zielfunktion:

$$\begin{aligned} f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{bmatrix} &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= f_B^{(1)} - (\mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N - \mathbf{c}_N^T)\mathbf{x}_N \\ &= f_B^{(1)} - \mathbf{t}_B^T\mathbf{x}_N \end{aligned}$$

der Testvektor:

$$\mathbf{t}_B^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N - \mathbf{c}_N^T$$

Weil $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, wenn alle Elemente dieses Vektors negativ sind, gibt es keine Verbesserung der Zielfunktion mehr, also das Optimum ist gefunden.

für das Beispielproblem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_B^T &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 8 & -1 \\ -1 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 8 & -1 \\ -1 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 16 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{17}{2} & 23 & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Es besteht die Möglichkeit, die Zielfunktion weiter zu reduzieren, durch Tausch der Basis (von der bearbeiteten Ecke zu einer neuen Ecke des Polyeders)

Voraussetzung des Basistausches:

1. der Wert der Zielfunktion darf sich nicht vergrößern und
2. die neue Basislösung muss zulässig sein

Von (1) soll die Variable, die dem maximalen Element des Testvektors entspricht, in die Basis eingesetzt werden (im Beispiel: x_3)

Von (2) soll die Variable, mit der nach dem Tausch die in der Basis bleibenden Variablen zulässig sein werden, von der Basis heraus-genommen werden.

z. B. x_1 oder x_5?

Weil

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N$$

d. h.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 8 & -1 \\ -1 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 3 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$$

wenn $x_1 = 0$ dann $\quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_5 = \frac{1}{2},$
ist die Lösung zulässig.

wenn $x_5 = 0$ dann $\quad x_3 = \frac{5}{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{3},$
ist die Lösung nicht zulässig.

Also, die neuen Basisvariablen:

$$\mathbf{x}_B^{(2^*)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N^{(1^*)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die neue Lösung:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Der neue Wert der Zielfunktion:

$$\begin{aligned} f_B^{(2)} &= f_B^{(1)} - t_3 x_3 \\ &= 26 - 23 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{17}{2} \end{aligned}$$

Auswahl einer Variablen von der Basis zur Nichtbasis

Angenommen x_k^N in $\mathbf{x}_N$ wurde ausgewählt, dann sind die Variablen in der Basis $\mathbf{x}_B$:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N$$

Es bedeutet

$$\begin{bmatrix} x_1^B \\ \vdots \\ x_m^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_m' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1' x_k^N \\ \vdots \\ a_m' x_k^N \end{bmatrix}$$

d. h.

$$x_i^B = b_i' - a_i' x_k^N = a_i' \left(\frac{b_i'}{a_i'} - x_k^N \right) \qquad i = 1, \cdots, m$$

- Wenn alle $a_i' < 0$,

$$x_i^B + a_i' x_k^N = b_i' \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$x_i^B,\ x_k^N \geq 0$$

dann ist der zulässige Bereich offen und es gibt Lösungen im Unendlichen. Das bedeutet, dass die Auswahl x_k^N nicht praktisch einsetzbar ist.

Wenn x_l^B von der Basis $\mathbf{x}_B$ weggelassen wird

$$x_l^B = b_l' - a_l' x_k^N = 0 \quad \text{dann} \quad x_k^N = \frac{b_l'}{a_l'}$$

Die anderen Variablen in $\mathbf{x}_B$:

$$x_i^B = a_i' \left(\frac{b_i'}{a_i'} - \frac{b_l'}{a_l'} \right) \qquad i = 1, \cdots, m \quad i \neq l$$

Wenn $a_i' > 0$ soll $\frac{b_i'}{a_i'} > \frac{b_l'}{a_l'}$

d. h.

$$\frac{b_l'}{a_l'} = min \left\{ \frac{b_i'}{a_i'}, \; a_i' > 0 \right\} \qquad i = 1, \cdots, m$$

damit ist die neue Basislösung zulässig:

$$x_i^B \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, m$$

Dadurch ist die Entscheidung getroffen, welche Variable aus der Basis herausgenommen und in die Nichtbasis eingesetzt werden soll.

Das Simplex-Tableau:

	$\mathbf{x}_N^T$	
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$	$\mathbf{b}' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$
	$\mathbf{t}_B^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N - \mathbf{c}_N^T$	$f_B = \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$

Für das Beispiel:

Die erste Iteration:

	x_2	x_3	x_4	
x_1	$-\frac{3}{4}$	2	$\frac{1}{4}$	3
x_5	$-\frac{1}{4}$	3	$-\frac{3}{4}$	5
	$-\frac{17}{2}$	23	$-\frac{11}{2}$	26

Die zweite Iteration:

	x_2	x_1	x_4	
x_3	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{8}$	-23	$-\frac{21}{8}$	$-\frac{17}{2}$

Die dritte Iteration:

	x_5	x_1	x_4	
x_3	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{12}{7}$
x_2	$\frac{8}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
	$-\frac{1}{7}$	-79	$-\frac{18}{7}$	$-\frac{60}{7}$

Die optimale Lösung des Problems:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{12}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^* = -\frac{60}{7}$$

Initialisierung des Simplex-Verfahrens:

Die Standardform:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & [c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n] \\
\text{mit} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

wobei $b_j \geq 0, \;\; j = 1, \cdots, m$.

Man führt Schlupfvariablen $x_{n+j}, \;\; j = 1, \cdots, m$ ein.

Dann definiert man:

$$min \qquad [x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}]$$

mit

$$\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
& x_i \geq 0, \;\; i = 1, \cdots, n+m
\end{aligned}$$

Das Problem wird initialisiert mit

Basisvariablen: $x_{n+j} = b_j \geq 0, \;\; j = 1, \cdots, m$

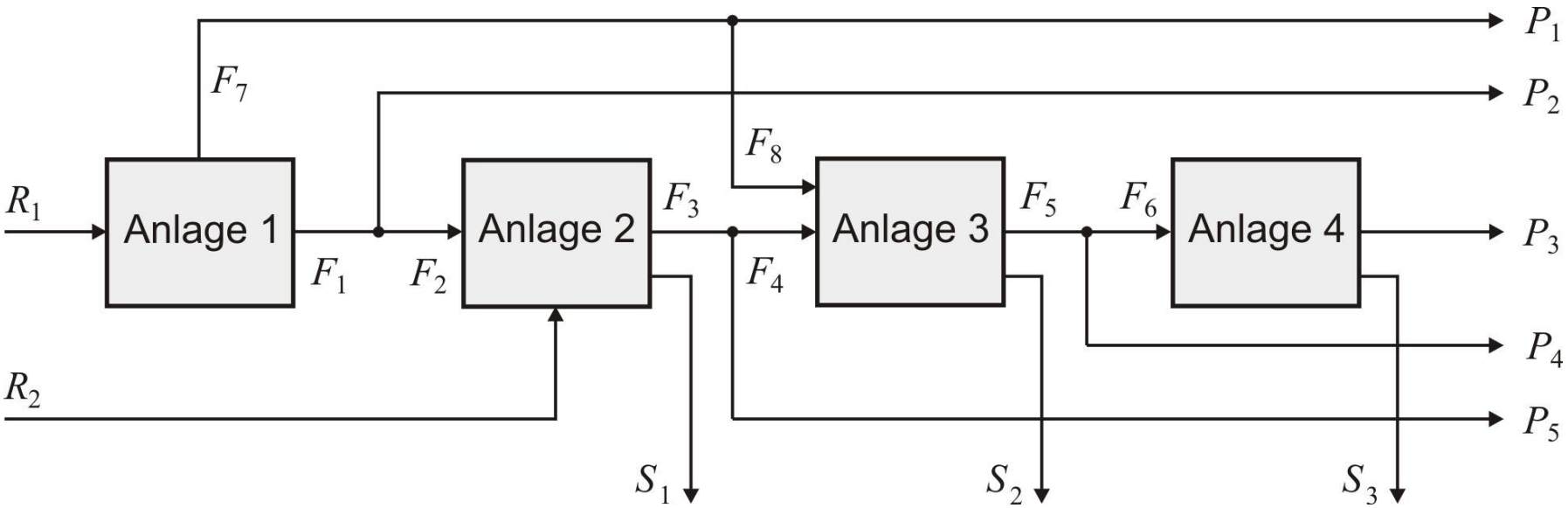
Nichtbasisvariablen: $x_i = 0, \;\; i = 1, \cdots, n$

Das Problem wird dann mit dem Simplex-Verfahren gelöst, bis zu einer Basislösung mit

$$x_{n+j} = 0, \;\; j = 1, \cdots, m$$

Dann erhält man einen zulässigen Punkt für die Initialisierung des originalen Problems.

Produktionsplanung eines Prozesses

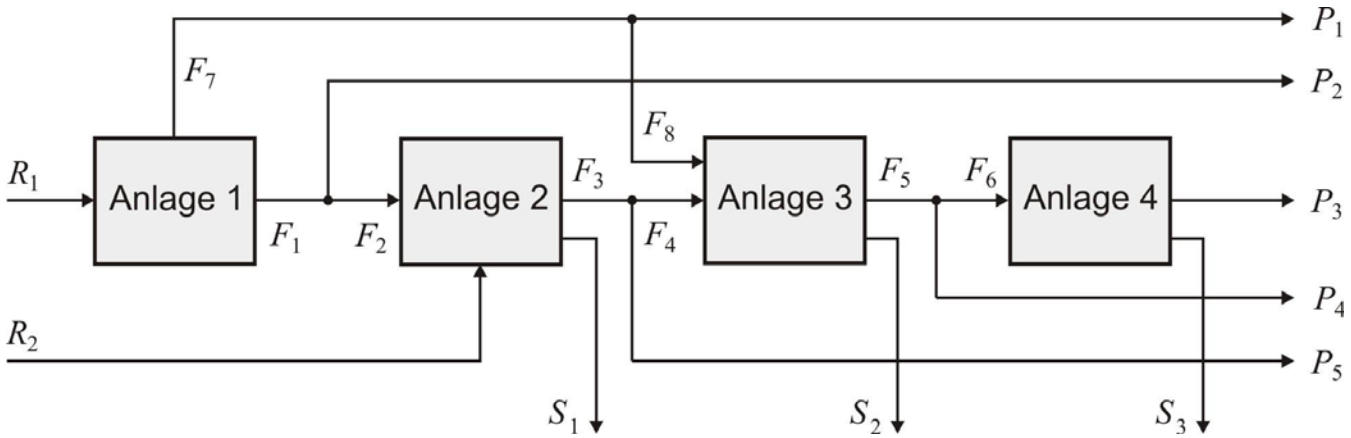


Marktbedingungen bei der Produktionsplanung:

	Rohstoffe		Produkte					Rückstände		
	R_1	R_2	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	S_1	S_2	S_3
Preis (€/kg)	$1,1$	$0,6$	$2,2$	$3,1$	$13,7$	$8,4$	$4,3$	$0,4$	$2,5$	$1,8$
Grenze (kg/h)	–	≤ 2.400	≥ 800	–	–	≤ 1.200	–	≤ 400	–	–

Daten der einzelnen Anlagen:

	Anlage 1	Anlage 2	Anlage 3	Anlage 4
Kapazität (kg/h)	$R_1 \leq 8.000$	$F_2 \leq 10.000$	$F_4 \leq 11.000$	$F_6 \leq 7.000$
Betriebskosten (€/h)	$0,173\ R_1$	$1,54\ F_2$	$2,73\ F_4$	$3.18\ F_6$
Bilanzbeziehungen	$R_1 = F_1 + F_7$ $F_1 = 0,7\,R_1$	$R_2 + F_2 = F_3 + S_1$ $R_2 = 0,45\,F_2$ $R_2 + F_2 = 1,15\,F_3$	$F_8 + F_4 = F_5 + S_2$ $F_8 = 0,33\,F_4$ $F_5 = 0,9\,(F_8 + F_4)$	$F_6 = P_3 + S_3$ $P_3 = 0,86\,F_6$



Die folgenden Gleichungsnebenbedingungen bzgl. der Bilanzierungen:

Anlage 1: $R_1 = F_1 + F_7,\ \ F_1 = 0,7\,R_1;$

Anlage 2: $R_2 + F_2 = F_3 + S_1,\ \ R_2 = 0,45\,F_2,\ \ R_2 + F_2 = 1,15\,F_3;$

Anlage 3: $F_8 + F_4 = F_5 + S_2,\ \ F_8 = 0,33\,F_4,\ \ F_5 = 0,9(F_8 + F_4);$

Anlage 4: $F_6 = P_3 + S_3,\ \ P_3 = 0,86\,F_6$

Stromaufteilung: $F_7 = P_1 + F_8,\ F_1 = P_2 + F_2,\ F_3 = F_4 + P_5,\ F_5 = P_4 + F_6;$

und Ungleichungsnebenbedingungen bzgl. der Beschränkungen

Rohstoffe: $R_2 \leq 2.400$

Produkte: $P_1 \geq 800,\ P_4 \leq 1.200$

Rückstände: $S_1 \leq 400$

Anlagen: $R_1 \leq 8.000,\ F_2 \leq 10.000,\ F_4 \leq 11.000,\ F_6 \leq 7.000$

Variablen: $R_i \geq 0,\ i = 1, 2;$

$F_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 8;$

$P_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5;$

$S_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$

Ergebnis für die Produktion nach der Optimierung:

Profit (€/h)	$f = 6066$
Einkaufsmenge der Rohstoffe (kg/h)	$R_1 = 5600;\ R_2 = 952$
Verkaufsmenge der Produkte (kg/h)	$P_1 = 800;\ P_2 = 1805;\ P_3 = 1713;\ P_4 = 1200;\ P_5 = 0$
Menge der Rückstände (kg/h)	$S_1 = 400;\ S_2 = 355;\ S_3 = 279$
Strommengen der Anlagen (kg/h)	$F_1 = 3920;\ F_2 = 2115;\ F_3 = 2667;\ F_4 = 2667$ $F_5 = 3192;\ F_6 = 1992;\ F_7 = 1680;\ F_8 = 880$