Adaptive und strukturvariable Regelungssysteme

Beiblatt zur Stabilität im Sinne von Lyapunov

Wir betrachten das freie und autonome nichtlineare, aber zeitinvariante System

$$\dot{x} \;=\; f(x) \tag{1}$$

mit $f : D \to \mathbb{R}^n$, lokal Lipschitz[1] in $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eindeutige Lösung[2] von (1) mit Anfangswert $x(0) = x_0 \in D$.

D. 1 (Ruhelage) *Der Punkt $x_R \in \mathbb{R}^n$ für den gilt: $0 = f(x_R)$ heißt Ruhelage*[3] *von (1).*

D. 2 (Stabilität) *Die Ruhelage $x_R \in D$ heißt stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für alle $x_0 \in D$ gilt:*

$$\|x_0 - x_R\| < \delta(\varepsilon) \qquad \Rightarrow \qquad \|x(t) - x_R\| < \varepsilon, \quad \textit{für alle} \quad t \geq 0.$$

*Die Ruhelage heißt **instabil**, wenn sie nicht stabil ist.*

D. 3 (Asymptotische Stabilität) *Die Ruhelage $x_R \in D$ heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und $\delta(\varepsilon) > 0$ so gewählt werden kann, daß für alle $x_0 \in D$ gilt:*

$$\|x_0 - x_R\| < \delta(\varepsilon) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_R\| = 0.$$

*Ist x_R asymptotisch stabil mit $D = \mathbb{R}^n$, so heißt x_R **global** asymptotisch stabil.*

D. 4 (Exponentielle Stabilität) *Die Ruhelage $x_R \in D$ heißt exponentiell stabil, wenn Konstanten $\gamma > 0$ und $\lambda < 0$ existieren, so daß gilt:*

$$\|x(t) - x_R\| \leq \gamma e^{\lambda t} \|x_0 - x_R\| \quad \textit{für alle} \quad t \geq 0.$$

*Ist x_R exponentiell stabil mit $D = \mathbb{R}^n$, so heißt x_R **global** exponentiell stabil.*

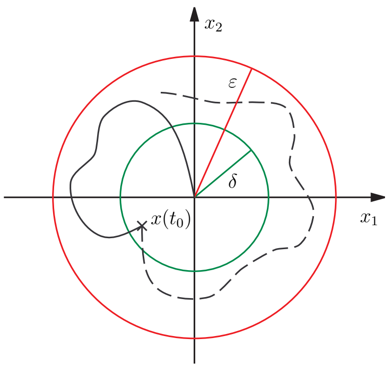

Abb. 1: Illustration zur (asymptotischen) Stabilität

[1] Lokal Lipschitz bedeutet: $\exists L > 0 : \; \forall x, y \in D : \; \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$.
[2] Falls f Lipschitz, so existiert stets eine solche Lösung.
[3] Zum Anfangswert $x(0) = x_R$, existiert die stationäre Lösung $x(t) = x_R$ für alle $t \geq 0$.

D. 5 (Definitheit) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung des Ursprungs. Die Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ heißt lokal **positiv definit**, wenn gilt*

a) V ist stetig differenzierbar,

b) $V(0) = 0$ und

c) $V(x) > 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$.

*Gilt statt (c) lediglich $V(x) \geq 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$, so heißt V lokal **positiv semi-definit**.*

*Die Funktion V heißt lokal **negativ definit**, wenn statt (c) gilt: $V(x) < 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$.*

*Die Funktion V heißt lokal **negativ semi-definit**, wenn statt (c) gilt: $V(x) \leq 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$.*

*Ist $D \equiv R^n$, so heißen die Eigenschaften **global**.*

Satz 1 (Direkte Methode von Lyapunov) *Sei $x_R = 0$ Ruhelage[4] von (1) und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung des Ursprungs.*

*Die Ruhelage $x_R = 0$ ist **genau dann** lokal **asymptotisch stabil**, wenn eine Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:*

a) V ist positiv definit auf D und

*b) $\frac{\partial V}{\partial x} f$ ist **negativ definit** auf D.*

*Die Funktion V wird dann als **Lyapunovfunktion** für das System[5] (1) bezeichnet.*

Die Ruhelage $x_R = 0$ ist lokal **stabil**, wenn eine lokal positiv definite Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\frac{\partial V}{\partial x} f$ auf D **negativ semi-definit** ist. Manchmal wird dann von einer *schwachen* Lyapunovfunktion gesprochen.

Referenzen

- M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.

[4] Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit wird hier die Ruhelage $x_R = 0$ betrachtet. Falls $x_R \neq 0$, so wählt man: $\tilde{x} = x - x_R$ und betrachtet $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) := f(\tilde{x} + x_R)$.

[5] Strenggenommen müsste es „Lyapunovfunktion für die Ruhelage x_R des Systems (1)“ heißen.