Beiblatt: Stabilität im Sinne von Lyapunov

Wir betrachten das freie System

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

mit $f : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$, stückweise stetig in $t \in [0, \infty)$ und lokal Lipschitz in x auf D.
Sei $x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eindeutige Lösung von (1) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in D$.

D. 1 (Ruhelage) *Der Punkt $x_R \in D$ heißt Ruhelage*[1] *von* (1) *wenn gilt:*

$$\forall t \in [t_0, \infty) : \; f(t, x_R) \equiv 0\,.$$

D. 2 (Stabilität) *Die Ruhelage $x_R \in D$ von* (1) *heißt **stabil**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $t_0 \geq 0$ ein $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ existiert, so daß für alle $x_0 \in D$ gilt:*

$$\|x_0 - x_R\| < \delta(\varepsilon, t_0) \qquad \Rightarrow \qquad \|x(t) - x_R\| < \varepsilon, \quad \text{für alle} \quad t \geq t_0.$$

*Ist x_R stabil mit $D = \mathbb{R}^n$, so heißt x_R **global** stabil.*

*Die Ruhelage heißt **gleichmäßig stabil**, wenn sie stabil ist und δ unabhängig von t_0 gewählt werden kann.*

*Die Ruhelage heißt **instabil**, wenn sie nicht stabil ist.*

D. 3 (Asymptotische Stabilität) *Die Ruhelage $x_R \in D$ heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und $\gamma(\varepsilon, t_0) > 0$ so gewählt werden kann, daß für alle $x_0 \in D$ gilt:*

$$\|x_0 - x_R\| < \gamma(\varepsilon, t_0) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_R\| = 0.$$

*Ist x_R asymptotisch stabil mit $D = \mathbb{R}^n$, so heißt x_R **global** asymptotisch stabil.*

*Die Ruhelage heißt **gleichmäßig asymptotisch stabil**, wenn sie gleichmäßig stabil ist und γ unabhängig von t_0 gewählt werden kann.*

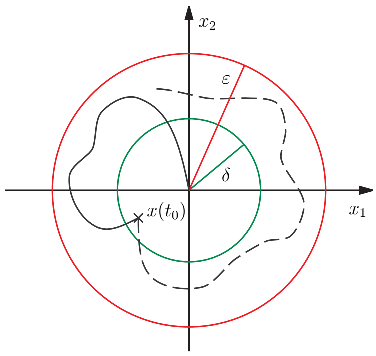

Abb. 1: Illustration zur (asymptotischen) Stabilität der Ruhelage

D. 4 (Exponentielle Stabilität) *Die Ruhelage $x_R \in D$ heißt exponentiell stabil, wenn Konstanten $\gamma(t_0) > 0$ und $\lambda < 0$ existieren, so daß gilt:*

$$\|x(t) - x_R\| \leq \gamma(t_0) e^{\lambda t} \|x_0 - x_R\| \quad \text{für alle} \quad t \geq t_0.$$

*Ist x_R exponentiell stabil mit $D = \mathbb{R}^n$, so heißt x_R **global** exponentiell stabil.*

*Die Ruhelage heißt **gleichmäßig exponentiell stabil**, wenn sie gleichmäßig stabil ist und γ unabhängig von t_0 gewählt werden kann.*

[1] Zum Anfangswert $x(t_0) = x_R$, existiert die stationäre Lösung $x(t) = x_R$ für alle $t \geq t_0$.

D. 5 (Definitheit) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $x_R \in \mathbb{R}^n$. Die Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ heißt lokal* ***positiv definit****, wenn gilt*

a) *V ist stetig differenzierbar (bzgl. x),*

b) *$V(0) = 0$,*

c) *$V(x) > 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$.*

Gilt statt (c) lediglich $V(x) \geq 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$, so heißt V ***positiv semi-definit****.*

Die Funktion V heißt ***negativ definit****, wenn statt (c) gilt: $V(x) < 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$.*

Die Funktion V heißt ***negativ semi-definit****, wenn statt (c) gilt: $V(x) \leq 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$.*

Ist $D \equiv R^n$, so heißen die Eigenschaften ***global****.*

Satz 1 (Direkte Methode von Lyapunov) *Sei x_R Ruhelage von* (1) *und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x_R.*

Die Ruhelage x_R ist genau dann lokal ***stabil****, wenn eine Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:*

a) *V ist positiv definit auf D und*

b) *$\frac{\partial V}{\partial x} f$ ist* ***negativ semi-definit*** *auf D.*

Die Ruhelage x_R ist genau dann lokal ***aymptotisch stabil****, wenn eine lokal positiv definite Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\frac{\partial V}{\partial x} f$* ***negativ definit*** *ist.*

Spezialfall: Lineares zeitinvariantes System (LTI)

Satz 2 (LTI System) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Die Ruhelage $x_R = 0$ von $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist global asymptotisch stabil.*

b) *A ist Hurwitz.*

c) *Für die Ruhelage $x_R = 0$ existiert eine quadratische Lyapunovfunktion $V(x) = x^\top Px$, $P = P^\top > 0$.*

Betrachte den Lyapunovfunktionskandidat $V(x) = x^\top Px$, $P = P^\top > 0$ für $\dot{x} = Ax$:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x)\dot{x} = \dot{x}^\top Px + x^\top P\dot{x} = x^\top A^\top Px + x^\top PAx = x^\top \left(A^\top P + PA\right) x$$

und definiere die Lyapunovgleichung

$$Q := -\left(A^\top P + PA\right) . \tag{2}$$

So ist $V(x) = x^\top Px$ genau dann eine Lyapuonvfunktion für $\dot{x} = Ax$, wenn $Q > 0$.

Satz 3 *Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Hurwitz, so existiert für jede symmetrische Matrix $Q > 0$ die eindeutige Lösung der Lyapunovgleichung* (2)*:*

$$P = \int_0^\infty e^{A^\top\tau} Q\, e^{A^\top\tau} \mathrm{d}\tau > 0.$$

Referenzen

- M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- W. J. Rugh. *Linear Systems Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.