Adaptive und strukturvariable Regelungssysteme

Beiblatt zur Definitheit von Matrizen

Definition 1 (Definitheit) *Die Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst:*

- *positiv definit* falls $x^T Mx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- *positiv semidefinit,* falls $x^T Mx \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- *negativ definit,* falls $x^T Mx < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- *negativ semidefinit,* falls $x^T Mx \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- *indefinit sonst.*

Definition 2 (Minor, Unterdeterminante) *Ein Minor (oder eine Unterdeterminante) der Matrix M ist die Determinante einer quadratischen Untermatrix von M, die sich durch Streichen von einer (oder mehrerer) Spalte(n) und Zeile(n) von M ergibt. Die Dimension der Untermatrix gibt die Ordnung des Minors (oder der Unterdeterminanten) an*

Definition 3 (Hauptminor, Hauptunterdeterminante, Hauptabschnittsdeterminante) *Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$. Sei weiter M_k die linke obere $k \times k$-Teilmatrix von M, die durch Streichung der $n-k$ am weitesten rechts gelegenen Spalten und $n-k$ untersten Zeilen entsteht. Die Determinante von M_k heißt k-ter Hauptminor (oder Hauptunterdeterminante oder Hauptabschnittsdeterminante).*

Satz 4 *Die quadratische Matrix M ist genau dann positiv definit, wenn ihr symmetrischer Teil*

$$M_S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$$

positiv definit ist.

Satz 5 (Prüfung über Eigenwerte) *Eine quadratische **symmetrische** Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann*

- *positiv definit, falls alle Eigenwerte von M größer als Null sind;*
- *positiv semidefinit, falls alle Eigenwerte von M größer oder gleich Null sind;*
- *negativ definit, falls alle Eigenwerte von M kleiner als Null sind;*
- *negativ semidefinit, falls alle Eigenwerte von M kleiner oder gleich Null sind und*
- *indefinit, sonst.*

Satz 6 (Prüfung über Hauptminoren) *Die **symmetrische** Matrix M ist genau dann **positiv definit**, wenn alle Hauptminoren von M positiv sind.*

Korrolar 7 *M ist negativ definit, falls alle Hauptminoren von $-M$ positiv sind.*

Satz 8 *M ist genau dann **negativ definit**, falls die Vorzeichen der Hauptminoren alternieren, das heißt, falls alle **ungeraden** Hauptminoren **negativ** und alle **geraden positiv** sind.*