Digitale Regelung - Beiblatt

Zustandsraumdarstellung linearer zeitkontinuierlicher Systeme

Unter einem linearen zeitinvarianten Zustandsraummodell versteht man das System von linearen zeitinvarianten Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1a}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)\,. \tag{1b}$$

Die Differentialgleichung (1a) heißt Zustands- oder Dynamikgleichung und die algebraische Gleichung (1b) heißt Ausgangsgleichung. Dabei bezeichnen die zeitveränderlichen Systemgrößen:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ den Zustandsvektor (zum Zeitpunkt t),

$u(t) \in \mathbb{R}^p$ die Eingangsgröße (zum Zeitpunkt t) und

$y(t) \in \mathbb{R}^q$ die Ausgangsgröße (zum Zeitpunkt t).

Die Dimension n des Zustandsvektors wird auch Ordnung oder Dimension des Systems genannt. Gibt es ebenso viele Eingangsgrößen wie Ausgangsgrößen, also $p = q$, so spricht man von einem quadratischen System; gilt $p = q = 1$, so spricht man von einem Eingrößen- oder SISO-System[1], anderenfalls von einem Mehrgrößen- oder MIMO-System[2]. Man geht davon aus, dass das System ab dem Zeitpunkt t_0 betrachtet wird und alle vorhergehenden Einflüsse unbekannt sind. Der Anfangszustand des Systems ist mit $x(t_0) = x_0$ bezeichnet.

Die Systemparameter setzen sich aus folgenden zeitinvarianten Matrizen zusammen:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Dynamikmatrix (auch Zustands- oder Systemmatrix),

$B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ der Eingangsmatrix,

$C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ der Ausgangsmatrix (auch Meßmatrix) und

$D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ dem Durchgriff (auch Durchgangsmatrix)

Abbildung 1 zeigt das Blockschaltbild des Differentialgleichungssystems (1).

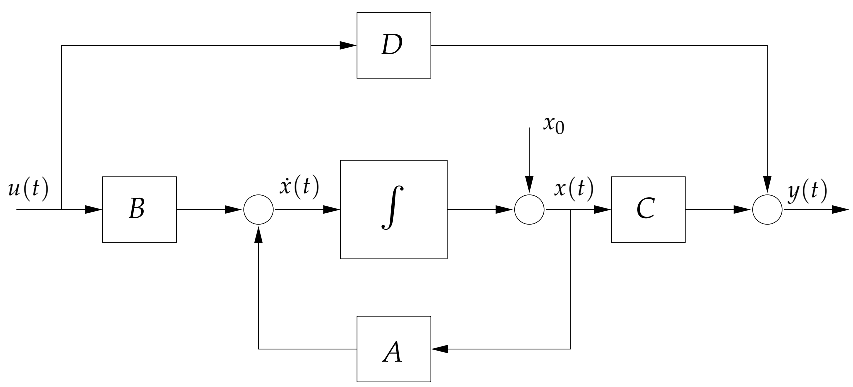

Abbildung 1: Blockschaltbild der Zustandsraumbeschreibung

[1] Single-Input-Single-Output

[2] Multiple-Input-Multiple-Output. Manchmal wird noch zwischen SIMO oder MISO-Systemen unterschieden...

Lösung des Anfangswertproblems

Homogener Teil

Wir betrachten zunächst den homogenen Teil der Zustandsgleichung (1a), also den Fall, dass das Eingangssignal $u(t) = 0$ für alle $t \geq t_0$ ist. Da keine externe Größe einfluß nimmt, wird die homogene Lösung $x(t)$ auch **Eigenbewegung** des Systems genannt.[3]

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Wie im skalaren Fall wählen wir die Exponentialfunktion als Lösungsansatz für die Differentialgleichung. Für unsere Vektordifferentialgleichung (2) benötigen wir jedoch die **Matrixexponentialfunktion**:

$$e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Exponentialfunktion für Matrizen *nicht elementweise* ausgewertet wird[4], sondern über folgende Potenzreihe definiert ist:

$$e^{At} \quad = \quad I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \,. \tag{3}$$

Genau wie bei der skalaren Exponentialfunktion gilt mit dieser Definition für die Ableitung der Matrixexponentialfunktion:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) \quad = \quad Ae^{At} \quad = \quad e^{At}A\,. \tag{4}$$

Diese Eigenschaft können wir nutzen, wenn wir die Zustandsgleichung (2) von links mit e^{-At} multiplizieren:

$$\begin{aligned} e^{-At}\dot{x}(t) &= e^{-At}Ax(t) \\ -e^{-At}Ax(t) + e^{-At}\dot{x}(t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Produktregel für Ableitungen kann man sich überzeugen, dass dies nichts anderes ist als:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) \quad = \quad 0\,.$$

Integration von t_0 bis t liefert

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A\tau}x(\tau)\right) d\tau &= 0 \\ e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{t_0}^{t} &= 0 \\ e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) &= 0 \\ e^{-At}x(t) &= e^{At_0}x_0\,. \end{aligned}$$

Da e^{-At} stets invertierbar ist und für die Inverse $\left(e^{-At}\right)^{-1} = e^{At}$ gilt, ergibt sich die Lösung zu

$$x(t) \quad = \quad e^{A(t-t_0)}x_0. \tag{5}$$

[3] Im Englischen auch *zero-input response*.

[4] Achtung: Die MATLAB-Funktion `exp()` tut genau dies. Zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion in MATLAB kann z. B. `expm()` verwendet werden.

Die Matrix $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird wegen Ihrer Bedeutung für die Lösung auch **Transitionsmatrix** oder **Übergangsmatrix** des Systems genannt. Wir fassen ihre wichtigsten Eigenschaften zusammen:

- $\Phi(t, t_0)$ ist regulär für alle $t \in \mathbb{R}$,
- $\Phi(t_0, t_0) = I$,
- $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$,
- $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(-t, t_0)$,
- $\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_0)A$.

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Wie zuvor multiplizieren wir von links mit e^{-At}:

$$\begin{aligned} e^{-At}\dot{x}(t) &= e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t) \\ -e^{-At}Ax(t) + e^{-At}\dot{x}(t) &= e^{-At}Bu(t) \\ \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) &= e^{-At}Bu(t). \end{aligned}$$

Integration liefert:

$$\begin{aligned} e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{t_0}^{t} &= \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ x(t) &= \underbrace{\Phi(t, t_0)x_0}_{\text{homogener Teil}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau}_{\text{erzwungener Teil}} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems setzt sich also aus der homogenen Lösung - der Eigenbewegung - und der partikulären Lösung oder dem erzwungenen Teil der Lösung zusammen.[5]

Zur Bestimmung des Ausgangs $y(t)$ brauchen wir lediglich (6) in die Ausgangsgleichung (1b) einzusetzen, und erhalten dann

$$y(t) = C\Phi(t, t_0)x_0 + C\int_{0}^{t} \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t). \tag{7}$$

[5] Der erzwungene Teil der Lösung wird im Englischen auch als *zero-state response* bezeichnet.