Digitale Regelung - Beiblatt

Winter 2009/10

Zur Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme

Wir betrachten das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \tag{1}$$

Satz: Jedes vollständig erreichbare System (1) ist vollständig steuerbar. Gilt für die Dynamikmatrix A des Systems

$$\det A \neq 0\,,$$

dann ist jedes vollständig steuerbare System vollständig erreichbar.

In dieser Notiz soll nur der Fall diskutiert werden: (1) **ist vollständig steuerbar und** $\det A = 0$**.**

Beispiel

Betrachte das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k.$$

Da A Nilpotent ist, gilt

$$0 = A^2 x_0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Das System ist vollständig steuerbar, da beliebige Anfangswerte in endlicher Zeit mit $(u_k) = (0, 0, 0, \dots)$ auf Null „gesteuert“ werden.

Jedoch gilt für die Erreichbarkeitsmatrix

$$rang \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 1\,.$$

Das System ist also nicht vollständig erreichbar.

Interpretation

Für zeitdiskrete Systeme ist vollständige Steuerbarkeit eine weniger anspruchsvolle Forderung als vollständige Erreichbarkeit, falls A Eigenwerte gleich Null hat. Dann ist es für die vollständige Steuerbarkeit des zeitdiskreten Systems nicht notwendig, dass die Erreichbarkeitsmatrix vollen Rang hat. Denn die mit den Eigenwerten Null assoziierten Eigenbewegungen werden (auch ohne Steuerfolge) in *endlicher Zeit* zu Null. Das heißt, dass dann die Erreichbarkeitsmatrix nur denjenigen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ aufspannen muss, der nicht im Kern von A liegt.

Betrachtet man die Kalmanzerlegung des zeitdiskreten Systems (1), so wird dieser Zusammenhang deutlich. Wir führen eine Koordinatentransformation $\tilde{x} = T^{-1}x$ mit T regulär durch, so dass das nicht vollständig erreichbare System wie folgt aufgespalten wird:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,k+1} \\ \tilde{x}_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,k} \\ \tilde{x}_{2,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k$$

wobei $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ der vollständig erreichbare Teil des Zustandsraum ist und $\tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ durch den Eingang (u_k) nicht beeinflusst werden kann. Hat nun die Matrix A_{22} ausschließlich Eigenwerte im Ursprung, so gilt für alle Anfangswerte $z_{2,0}$:

$$0 = A_{22}^{n_2} \tilde{x}_{2,0}$$

d. h. alle Anfangswerte $\tilde{x}_{2,0} \in \mathbb{R}^{n_2}$ werden in endlicher Zeit auf Null überführt. Für vollständige Steuerbarkeit von (1) muss also lediglich gelten:

$$rang[b_1 \ A_{11}b_1 \ A_{11}^2 b_1 \cdots \ A_{11}^{n_1-1} b_1] = n_1 \,.$$

Für vollständige Erreichbarkeit von (1) muss hingegen gelten

$$rang[b \ Ab \ A^2 b \cdots] = n_1 + n_2 = n \,.$$

Warum geht dies nicht für zeitkontinuierliche Systeme? Die Kalmanzerlegung ist auch für zeitkontinuierliche Systeme möglich. Jedoch wird für Steuerbarkeit gefordert, dass der Zustand in *endlicher Zeit* in den Ursprung gesteuert wird. Da die Eigenbewegungen zeitkontinuierlicher System nur asymptotisch dem Ursprung zustreben, ist diese Forderung der Steuerbarkeit nicht erfüllt.

Für lineare zeitkontinuierliche Systeme ist vollständige Steuerbarkeit äquivalent zur vollständigen Erreichbarkeit.