Digitale Regelung - Beiblatt

Sommer 2011

Strukturelle Eigenschaften zeitdiskreter Systeme

1 Definitionen

Wir betrachten das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k\,, \qquad x_0 = x^o \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$
$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{2}$$

mit $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$, $y_k \in \mathbb{R}^q$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$.
Für SISO-Systeme gilt: $p = q = 1$.

D. 1 (Erreichbarkeit) *Der Zustand $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ des Systems (1)-(2) heißt erreichbar, falls eine Folge (u_k), $k = 0, 1, \ldots, N-1$ mit $N < \infty$ existiert, die den Anfangswert $x_0 = 0$ in den Zustand $x_N = \bar{x}$ überführt.*

*Das System (1)-(2) heißt **vollständig erreichbar**, wenn **jeder** Zustand $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ erreichbar ist.*

D. 2 (Steuerbarkeit) *Der Zustand $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ des Systems (1)-(2) heißt steuerbar, falls eine Folge (u_k), $k = 0, 1, \ldots, N-1$ mit $N < \infty$ existiert, die den Anfangswert $x_0 = \bar{x}$ in den Zustand $x_N = 0$ überführt.*

*Das System (1)-(2) heißt **vollständig steuerbar**, wenn **jeder** Zustand $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ steuerbar ist.*

D. 3 (Beobachtbarkeit) *Der Zustand $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ des Systems (1)-(2) heißt beobachtbar, falls eine Folge (u_k) so existiert, daß $x_0 = \bar{x}$ aus der Kenntnis der Folgewerte y_k und u_k, $k = 0, 1, \ldots, N$ ermittelt werden kann.*

*Das System (1)-(2) heißt **vollständig beobachtbar**, wenn **jeder** Zustand $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ beobachtbar ist.*

D. 4 (Rekonstruierbarkeit) *Der Zustand $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ des Systems (1)-(2) heißt rekonstruierbar, falls eine Folge (u_k) so existiert, daß $x_N = \bar{x}$ aus der Kenntnis der Folgewerte y_k und u_k, $k = 0, 1, \ldots, N$ ermittelt werden kann.*

*Das System (1)-(2) heißt **vollständig rekonstruierbar**, wenn **jeder** Zustand $\bar{x}_N \in \mathbb{R}^n$ rekonstruierbar ist.*

D. 5 (Stabilisierbarkeit) *Das System (1)-(2) heißt stabilisierbar, falls eine Matrix $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$ existiert, so daß die Matrix*

$$A + BK$$

ausschließlich Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt.

D. 6 (Detektierbarkeit) *Das System (1)-(2) heißt detektierbar, falls eine Matrix $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ existiert, so daß die Matrix*

$$A + \hat{K}C$$

ausschließlich Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt.

2 Dualtität

Wir betrachten die folgenden beiden Systeme:

1. Primalsystem (Zustand x_p, Eingang u_p, Ausgang y_p):

$$
\begin{aligned}
x_{p,k+1} &= Ax_{p,k} + Bu_{p,k}\,, \qquad x_{p,0} = x_p^o \in \mathbb{R}^n \\
y_{p,k} &= Cx_{p,k} + Du_{p,k}
\end{aligned}
$$

mit $x_{p,k} \in \mathbb{R}^n$, $u_{p,k} \in \mathbb{R}^p$, $y_{p,k} \in \mathbb{R}^q$.

2. (algebraisch) duales System (Zustand x_d, Eingang u_d, Ausgang y_d):

$$
\begin{aligned}
x_{d,k+1} &= A^T x_{d,k} + C^T u_{d,k}\,, \qquad x_{d,0} = x_d^o \in \mathbb{R}^n \\
y_{d,k} &= B^T x_{d,k} + D^T u_{d,k}
\end{aligned}
$$

mit $x_{d,k} \in \mathbb{R}^n$, $u_{d,k} \in \mathbb{R}^q$, $y_{d,k} \in \mathbb{R}^p$.

Zwischen den Eigenschaften der beiden Systeme bestehen folgende Zusammenhänge:

Primalsystem		Dualsystem
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	$\leftrightarrow$	$A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$B \in \mathbb{R}^{n\times p}$	$\leftrightarrow$	$C^T \in \mathbb{R}^{n\times q}$
$C \in \mathbb{R}^{q\times n}$	$\leftrightarrow$	$B^T \in \mathbb{R}^{p\times n}$
Erreichbarkeit	$\leftrightarrow$	Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeit	$\leftrightarrow$	Erreichbarkeit
Steuerbarkeit	$\leftrightarrow$	Rekonstruierbarkeit
Rekonstruierbarkeit	$\leftrightarrow$	Steuerbarkeit
Stabilisierbarkeit	$\leftrightarrow$	Detektierbarkeit
Detektierbarkeit	$\leftrightarrow$	Stabilisierbarkeit