Digitale Regelung - 5. Übung

Winter 2010/11

Aufgabe 1

Gegeben ist das zeitdiskrete LTI System

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + bu_k + b_v v_k \\ y_k &= c^T x_k. \end{aligned} \tag{1}$$

mit der Zustandsgröße $x_k \in \mathbb{R}^2$, der Stellgröße $u_k \in \mathbb{R}$ und Störgröße $v_k \in \mathbb{R}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe:
Aufgaben a) und b) sollen vor der Übung zu Hause vorbereitet werden (vgl. 3. und 4. Übung).

a) Zeigen Sie, dass das System vollständig erreichbar ist und bestimmen Sie die Zustandsrückführung k^T so, daß der geschlossene Regelkreis Dead-Beat-Verhalten aufweist.

b) Bestimmen Sie die proportionale Verstärkung g für die Führungsgröße, so dass die stationäre Verstärkung des Führungsverhaltens des geschlossenen Regelkreises 1 beträgt.

c) Untersuchen Sie den Einfluss der konstanten Störung $(v_k) = (v_0, v_0, ...), v_0 \neq 0$ auf den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises mit Zustandsrückführung.

d) Entwerfen Sie einen PI-Zustandsregler für das System, so dass der geschlossene Regelkreis Dead-Beat-Verhalten aufweist und $u_0 = u_s$ gilt, wobei $u_s = \lim_{k\to\infty} u_k$.

e) **Aufgaben zur Nachbereitung:** Zeigen Sie, dass für die stationäre Verstärkung des Störverhaltens des geschlossenen Regelkreis mit PI-Zustandsrückführung gilt: $\frac{y^s}{v_0} = 0$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die zeitdiskreten LTI Systeme in Zustandsraumdarstellung (1) mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1^T = (-0.5,\ 1)$$

und

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2.5 & -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2^T = (-1,\ 1.5,\ 1)$$

a) Untersuchen Sie den homogenen Teil der Systeme hinsichtlich exponentieller Stabilität.
Hinweis: Sie können beim charakteristischen Polynom von A_2 den Term $\lambda + 2$ ausklammern.

b) Sind die gegebenen Zustandsraumdarstellungen der Systeme minimale Realisierungen der jeweiligen Übertragungsfunktion?

c) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(z) = \frac{Y_1(z)}{U_1(z)}$ und $G_2(z) = \frac{Y_2(z)}{U_2(z)}$ der Systeme.
Hinweis: Die Adjunkte einer 3×3*-Matrix berechnet sich mit:*

$$adj \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

d) Prüfen Sie das Ein-/Ausgangsverhalten der Systeme auf BIBO-Stabilität. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich Ihrer Antworten zu Aufgabenteil a) und b).

Aufgabe 3

Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ mit minimale Zustandsraumrealisierung:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + bu_k \\ y_k &= c^T x_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Realisierung (2) der Übertragungsfunktion $G(z)$ nicht eindeutig ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine Zustandstransformation.
Für invertierbare Matrizen $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *gilt:* $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z-1}{(z+0.5+i0.1)(z+0.5-i0.1)}$$

Bestimmen Sie die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform, welche diese Übertragungsfunktion minimal realisiert.