Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 4

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

Gegeben ist die homogene Differenzengleichung

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x_k\,, \qquad x_0 = x^o \in \mathbb{R}^2\,.$$

Bestimmen Sie die *reelle* Lösung (x_k) für den Anfangswert $x^o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ unter Verwendung der eulerschen Formel!

Hinweis:
Das äquivalente System unter der Zustandstransformation $\tilde{x}_k = T x_k$ hat die Dynamikmatrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}j & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}j \end{pmatrix}, \qquad \text{wenn} \qquad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}j & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} u_k \tag{1}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Ist das homogene System asymptotisch stabil?

b) Welche Dimension muss der erreichbare Unterraum mindestens haben, damit das System stabilisierbar ist? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Geben Sie Bedingungen für α und β an, so dass das System vollständig erreichbar ist!

d) Sei $\alpha = \frac{1}{20}$ und $\beta = \frac{-1}{20}$. Bestimmen Sie die Zustandsrückführung $k^T = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$, so dass der geschlossene Kreis Dead-Beat-Verhalten besitzt.

Aufgabe 3

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & -1,5 & 2,7 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \qquad (2)$$

$$y_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_k$$

a) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \frac{7}{10}\lambda + \frac{1}{10})$ das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix ist!

b) Ist das System vollständig beobachtbar?

c) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ an!

d) Ist $G(z)$ BIBO-stabil?

Aufgabe 4

Gegeben ist der Abtastregelkreis mit Halteglied null-ter Ordnung (ZOH) und der zeitkontinuierlichen Regelstrecke

$$G(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

a) Bestimmen sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ der zeitdiskreten Regelstrecke.

b) In welchem Intervall sollte die Abtastzeit T_a nach der Faustformel gewählt werden?

c) Sei $T_a = \frac{\ln(2)}{\alpha}$. Bestimmen Sie die Pole der q-Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$.

Falls es für Ihre Lösung hilfreich ist, verwenden Sie folgende Korrespondenztabelle:

Laplace-Transformierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z - e^{\alpha T_a}}$
$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$te^{\alpha t}$	$\left(kT_a e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{T_a e^{\alpha T_a} z}{(z - e^{\alpha T_a})^2}$