Digitale Regelungssysteme - Übungsklausur 14

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz[1] nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
max. Punkte	XX	XX	XX	XX	XX
erreichte Punkte					
				Note	

[1] In der Übungsklausur ist dieser Platz nicht enthalten

Digitale Regelungssysteme - Übungsklausur 14

Aufgabe 1

16 Punkte

Gegeben ist das System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \tag{1}$$

mit Anfangszustand $x_0 = \begin{pmatrix} -16 & 0 & -1 & 2^{11} & 2^{-8} \end{pmatrix}^T$.

a) Geben Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an!

b) Geben Sie die Transitionsmatrix $\Psi(k)$ des Systems an!

c) Berechnen Sie den Zustand x_k für den Zeitschritt $k = 10$, wenn folgende Steuerfolge anliegt: $u_8 = u_9 = -\frac{4}{3}$ und $u_k = 0$, sonst.

d) Ist das System vollständig erreichbar? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

e) Ist das System vollständig steuerbar? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

Aufgabe 2

18 Punkte

Gegeben ist das System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \tag{2a}$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_k \tag{2b}$$

a) Ist das System stabil im Sinne von Lyapunov? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

b) Ist das System stabilisierbar? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

c) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung, sodass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $\{-0.5, -0.5\}$ liegen und das Führungsverhalten für konstante Eingänge keinen stationären Regelfehler aufweist!

d) Geben Sie (allgemein) die Differenzengleichung des geschlossenen Regelkreises an und bestimmen Sie den stationären Regelfehler, wenn auf (2a) zusätzlich die Eingangsstörung $(v_k) = (1, 1, 1, 1, \ldots)$ via $b_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ wirkt!

Aufgabe 3 **11 Punkte**

Gegeben ist das System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_k \tag{3a}$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_k \tag{3b}$$

a) Bestimmen Sie jeweils die Dimension des erreichbaren und beobachtbaren Unterraums!

b) Zeigen Sie, dass das Ein-Ausgangsverhalten durch die Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{2}{z}$ beschrieben wird!

c) Wie erklärt sich die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(z)$ hinsichtlich der Dimensionen der unter a) bestimmten Unterräume? Wie verhalten sich die Unterräume zueinander?

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Gegeben ist die zeitkontinuierliche Regelstrecke im Abtastregelkreis mit Halteglied null-ter Ordnung:

$$G(s) = \frac{s(s+8)}{s^2+4}$$

a) Geben Sie die kleinste obere Schranke für die Abtastzeit T_a an, so dass die Streifenbedingung erfüllt ist!

Sei im Folgenden die Abtastzeit $T_a = \frac{\pi}{8}$.

b) Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Abtastsystems und bestimmen Sie deren Nullstellen!
Hinweis: Verwenden Sie auch Tabelle 1. Es gilt: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c) Bestimmen Sie allgemein die Polstellen der zugehörigen q-transformierten Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$, wenn $G(s)$ Pole bei $s_x = \pm j\omega_0$ besitzt! Geben Sie Real- und Imaginärteil an!

Laplace-Trans- formierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$
$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\left(\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{\sin(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\left(\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\sin(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{e^{\alpha T_a}\sin(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$
$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$

Tabelle 1: Korrespondenztabelle der Laplace- und z-Transformation abgetasteter Signale