Digitale Regelungssysteme - Übungsklausur 15

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz[1] nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Abgabe: ________

Studiengang: ____________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
max. Punkte	XX	XX	XX	XX	XX
erreichte Punkte					
				Note	

[1] In der Übungsklausur ist dieser Platz nicht enthalten

Aufgabe 1

23 Punkte

Gegeben ist die zeitdiskrete Regelstrecke:

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$
$$y_k = c^T x_k \tag{2}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Ausgang der Regelstrecke soll folgender Trajektorie folgen:

$$(y_k^*) = \left(1,\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots\right), \quad k = 0,1,2,3\ldots$$

a) Ist die Regelstrecke vollständig beobachtbar?

b) Geben Sie die allgemeine Lösung x_k für gegebenen Anfangszustand x_0 und Eingangsfolge (u_k) an und bestimmen Sie die Werte der Ausgangsfolge y_0, y_1, y_2 allgemein!

c) Berechnen Sie den Anfangszustand $x_0^* = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} & x_{3,0} \end{pmatrix}^T$, so dass das System (1)-(2) auf der gegebenen Trajektorie (y_k^*) startet!

d) Berechnen Sie den konstanten Eingang u^{s}, so dass $y_k = y^{\mathrm{s}} = -1, \forall k > 5$.

Sei $\big((y_k^*), (u_k^*), (x_k^*)\big)$ eine gegebene Lösung des Differenzengleichungssystems (1)-(2), also gilt:

$$x_{k+1}^* = Ax_k^* + bu_k^*$$
$$y_k^* = c^T x_k^*$$

Betrachten Sie die Regelstrecke (1)-(2) mit Anfangswert $x_0 \neq x_0^*$ und dem Regelgesetz

$$u_k = k^T(x_k - x_k^*) + u_k^*, \quad \text{mit:} \quad k^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

e) Geben Sie die Dynamik des Folgefehlers $e_k = x_k - x_k^*$ an!

f) Zeigen Sie, dass das Regelgesetz das System (1)-(2) für beliebige Anfangszustände x_0 in 3 Zeitschritten auf die Solltrajektorie (y_k^*) bringt!

Aufgabe 2

11 Punkte

Gegeben ist die Regelstrecke mit Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2+z+2}$$

a) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform an!

b) Warum ist ein trivialer Beobachter für die Zustandsschätzung ungeeignet?

c) Geben Sie die Differenzengleichung des Luenbergerbeobachters an und entwerfen Sie einen Luenbergerbeobachter, so dass die Schätzfehlerdynamik dead-beat-Verhalten aufweist!

Aufgabe 3

22 Punkte

Gegeben ist das Differenzengleichungssystem:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 7 \end{pmatrix} x_k$$

a) Ist das System stabil im Sinne von Lyapunov?

b) Ist das System vollständig erreichbar? Welche Dimension besitzt der erreichbare Unterraum?

c) Ist das System stabilisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Ist das System vollständig beobachtbar? Welche Dimension besitzt der beobachtbare Unterraum?

e) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$! (Kürzen Sie dabei soweit wie möglich!)

f) Ist das System eine minimale Realisierung? Wie erklärt sich die Ordnung der Übertragungsfunktion?

Digitale Regelungssysteme - Übungsklausur 15

Aufgabe 4 **12 Punkte**

Gegeben ist der Abtastregelkreis mit Halteglied nullter Ordnung und Regelstrecke mit Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{s(s+10)}{(s+0,001)(s+0,1)}$$

a) Berechnen Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $G_z(z)$ für die Abtastzeit T_a allgemein!

b) Abbildung 1 zeigt den Amplitudengang von $G_z(e^{j\omega})$ für verschiedene Abtastzeiten T_a. Die Frequenzachsen sind jeweils auf die halbe Abtastfrequenz normiert.

Geben Sie die Diagramme in Reihenfolge aufsteigender Abtastfrequenz ω_a an und bestimmen Sie die jeweilige Abtastfrequenz ω_a!

Hinweis: Betrachten Sie die Knickfrequenzen der Übertragungsfunktion. Das Ergebnis von Aufgabenteil a) wird zur Lösung nicht benötigt.

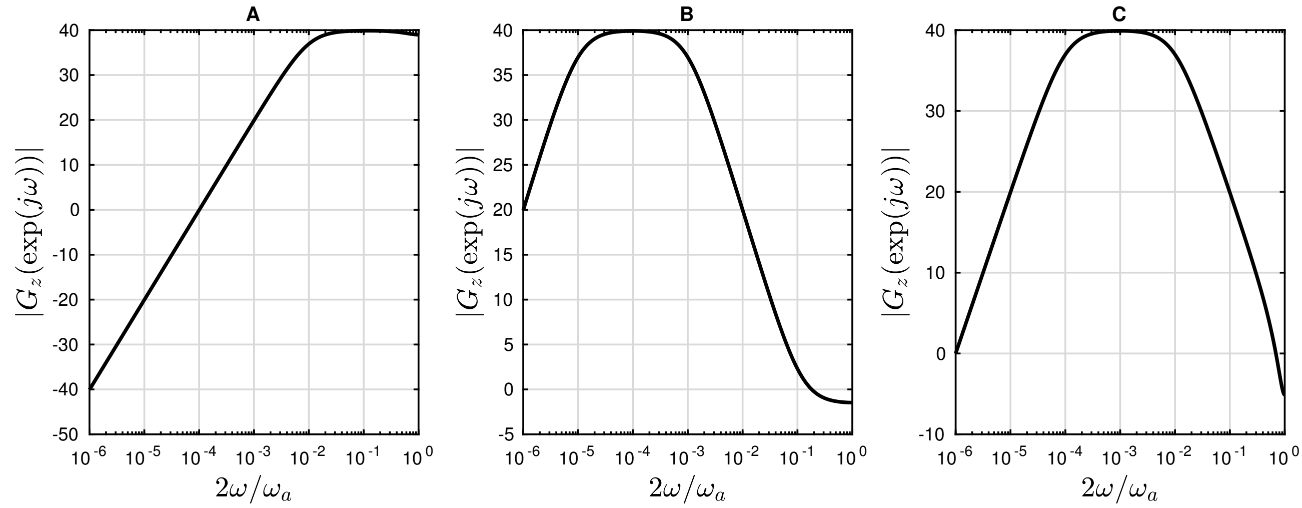

Abbildung 1: Amplitudengang von $G_z(z)$ für verschiedene Abtastzeiten T_a.

Laplace-Transformierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$

Tabelle 1: Korrespondenztabelle der Laplace- und z-Transformation abgetasteter Signale