Digitale Regelungssysteme - Übungsklausur 16

Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz[1] nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

17 **Punkte**

Gegeben ist die zeitkontinuierliche Regelstrecke im Abtastregelkreis mit Halteglied nullter Ordnung und Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} x(t)\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Zustandsraumdarstellung des Abtastsystems mit $T_a = \ln\left(\sqrt{2}\right)$!

b) Berechnen Sie z-Übertragungsfunktion $G_z(z)$ des Abtastsystems!

Die Übertragungsfunktion der Strecke ist: $G(s) = \dfrac{-\frac{1}{2}s + 1}{(s+2)(s+4)}$

c) In welchem Intervall sollte die Abtastzeit T_a nach der Faust-Formel gewählt werden?

d) Zur Simulation wird nun das zeitkontinuierliche Ein-Ausgangsverhalten $G(s)$ mit Hilfe der Euler-Diskretisierung approximiert. Es gilt:

$$s = \frac{z-1}{T_a}\,.$$

Bestimmen Sie die Approximation $\tilde{G}_z(z)$ in Pol-Nullstellenform in Abhängigkeit von $T_a > 0$!

e) Bestimmen Sie das Intervall für $T_a > 0$, für das die Approximation $\tilde{G}_z(z)$ BIBO-stabil ist!

f) Kann $\tilde{G}_z(z)$ für gewisse $T_a > 0$ Nullstellen im Inneren des Einheitskreises besitzen?

[1] In der Übungsklausur ist dieser Platz nicht enthalten

Aufgabe 2

14 Punkte

Geben ist die zeitdiskrete Regelstrecke mit

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & \beta & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_k$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} x_k .$$

a) Für welche Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ ist das System vollständig beobachtbar?

b) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des Luenberger Beobachters allgemein an!

c) Sei $\beta = 4$. Bestimmen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{k} \in \mathbb{R}^3$ so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamik bei $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2}j$ liegen!

Aufgabe 3

17 Punkte

Gegeben ist die zeitdiskrete Regelstrecke

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{64} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u_k, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_k .$$

a) Ist die Ruhelage $x_R = 0$ der Regelstrecke *stabil* im Sinne von Lyapunov?

b) Bestimmen Sie Bedingungen an b_1, b_2, so dass das System *nicht* vollständig erreichbar ist!

Im Folgenden seien $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Betrachten Sie die Ausgangsrückführung $u_k = Ky_k$ mit $K \in \mathbb{R}$.

c) Geben Sie die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises mit Ausgangsrückführung an!

d) Kann $K \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass die Ruhelage des geschlossenen Regelkreis *asymptotisch* stabil im Sinne von Lyapunov ist? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

e) Bestimmen Sie das Intervall für $K \in \mathbb{R}$, für das die Ruhelage des geschlossenen Regelkreis *stabil* im Sinne von Lyapunov ist!

Im Folgenden seien $b_1 = 0$ und $b_2 = 1$.

f) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises mit Ausgangsrückführung $u_k = Ky_k$ und $K = -96$ und berechnen Sie deren Eigenwerte! Ist die Ruhelage des geschlossenen Regelkreis *asymptotisch* stabil im Sinne von Lyapunov? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

g) Geben Sie die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises mit der Zustandsrückführung $u_k = k^T x_k$, $k^T = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ an!

h) Wie müssen k_1, k_2 gewählt werden, damit die Pole des geschlossen Regelkreises bei $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ liegen?

Aufgabe 4

10 **Punkte**

Gegeben ist die zeitdiskrete Regelstrecke

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + bu_k \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die homogene Lösung x_k des zeitdiskreten Systems mit Anfangswert x_0!

Betrachten Sie nun das erweiterte System mit Zustand $\bar{x} = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ der Form:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & A \end{pmatrix} \bar{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u_k \\ \bar{y}_k &= \begin{pmatrix} c^T & 0 \end{pmatrix} \bar{x}_k \end{aligned}$$

b) Geben Sie die Dynamikmatrix $\bar{A}$ und Ausgangsmatrix $\bar{c}^T$ des erweiterten Systems explizit an und bestimmen Sie die Dimension des beobachtbaren Unterraums!

c) Ist das erweiterte System detektierbar?

d) Sei $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ die Übertragungfunktion des Originalsystems. Bestimmen Sie $\bar{G}(z) = \frac{\bar{Y}(z)}{U(z)}$ in Abhängigkeit von $G(z)$!

Hinweis: Betrachten Sie $\bar{y}_k$ in Abhängigkeit vom Originalausgang y!