Digitale Regelungssysteme - Übungsklausur 17

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz[1] nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

13 Punkte

Gegeben ist das System mit Anfangszustand $x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} & x_{3,0} & x_{4,0} \end{pmatrix}^\top$ und Zustandsraumbeschreibung

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Erreichbarkeitsmatrix und geben Sie die Dimension des erreichbaren Unterraums an! Ist das System vollständig erreichbar?

b) Ist das System vollständig steuerbar? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Berechnen Sie den Verlauf der Zustände $x_{i,k}$ für $i \in \{3,4\}$ und die Abtastschritte $k \in \{1,2,3\}$!

d) Berechnen Sie die Steuerfolge (u_k), sodass sich für $k = 2$ der Zustand $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{3,0} & x_{4,0} \end{pmatrix}^\top$ ergibt!

[1] In der Übungsklausur ist dieser Platz nicht enthalten

Aufgabe 2

15 Punkte

Gegeben ist das System mit der unbekannten Störung (v_k) und Zustandsraumdarstellung

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x_k + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_v} v_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{c^\top} x_k \,.$$

a) Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist!

b) Entwerfen Sie einen Luenberger Beobachter, sodass der Schätzfehler für konstante (v_k) in drei Schritten konvergiert!

c) Geben Sie die Dynamik für den Schätzfehler $\hat{e}_k = \hat{x}_k - x_k$ an!

d) Konvergiert der Schätzfehler für $k \to \infty$ gegen Null, wenn eine konstante Störung $(v_k) = (1, 1, ...)$ wirkt?
Hinweis: Betrachten Sie lediglich die erste Komponente.

Zur Berücksichtigung der unbekannten Störung v_k wird die folgende Beobachterstruktur verwendet

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= F z_k + (L_1 + F h) y_k \\ \hat{x}_k &= \quad z_k + h y_k, \end{aligned}$$

mit $L_1 \in \mathbb{R}^3$, sodass sich für den Schätzfehler $\hat{e}_k = \hat{x}_k - x_k$ die folgende Dynamik ergibt:

$$\hat{e}_{k+1} = \underbrace{\left((I - hc^\top) A - L_1 c^\top \right)}_{F} \hat{e}_k + (I - hc^\top) b_v \, v_k.$$

e) Berechnen Sie den Vektor $h \in \mathbb{R}^3$ so, dass die Schätzfehlerdynamik unabhängig von der Störung v_k ist!

Aufgabe 3

16 Punkte

Gegeben ist die Störbeobachterstruktur mit Störgrößenaufschaltung in Abbildung 1. Das Zustandsraummodell des Prozesses mit konstanter Eingangsstörung v_k ist:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3}{8} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_k,$$
$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_k$$

a) Geben Sie das Zustandsraumodell des Störgenerators für die konstante Störung sowie dessen Parameter $A_v, c_v^\top$ an!

b) Geben Sie das erweiterte Zustandsraummodell zum Entwurf eines Störbeobachters für den Störgenerator mit A_v und $c_v^\top$ allgemein an!

c) Geben Sie die Differenzengleichung des Beobachters für das erweiterte System allgemein an!

d) Geben Sie das Regelgesetz zur Aufschaltung der geschätzten Störung $\hat{v}_k$ an!

e) Sei $\hat{k} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}^\top$ die Beobachterverstärkung für das erweiterte Modell. Setzen Sie das Regelgesetz zur Störaufschaltung ein und berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion $C(z) = \frac{U(z)}{Y(z)}$ des erweiterten Beobachters mit Eingang $Y(z)$ und Ausgang $U(z)$!

Hinweis: Falls Sie die vorangegangenen Aufgaben nicht lösen konnten, bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Zustandsraummodells mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad c^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

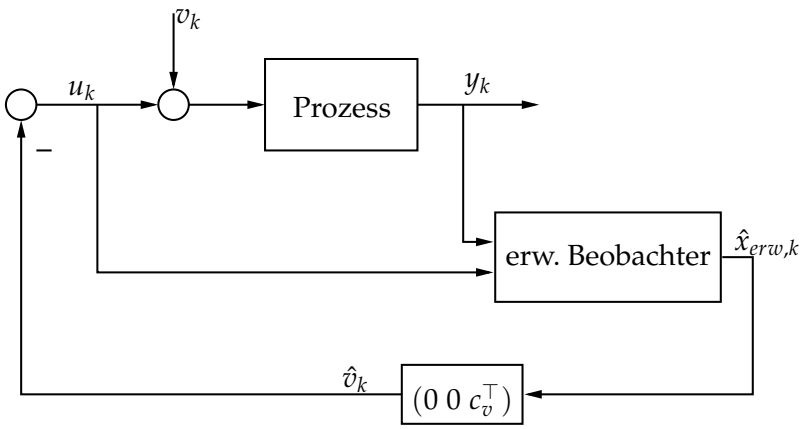

Abbildung 1: Blockschaltbild Störgrößenaufschaltung

Aufgabe 4

12 Punkte

Gegeben ist die zeitkontinuierliche Regelstrecke

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+0.5)(s+1)}$$

im Abtastregelkreis mit Halteglied null-ter Ordnung und einer Abtastzeit von $T_a = \ln(4)$.

a) Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Abtastsystems und bestimmen Sie deren Pol- und Nullstellen! *Hinweis: Verwenden Sie Tabelle 1.*

b) Ist das Ein-/Ausgangsverhalten des Abtastsystems BIBO-stabil? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Geben Sie die Pol- und Nullstellen q-Transformierten Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ in Abhängigkeit von T_a an!

Hinweis: $G^{\#}(q)$ muss dafür nicht berechnet werden. Beachten auch Sie den Relativgrad von $G(s)$!

Laplace-Transformierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$

Tabelle 1: Korrespondenztabelle der z- und Laplace-Transformation abgetasteter Signale