Beiblatt 1: Vektorräume

Bei der Untersuchung von nichtlinearen System spielen Abschätzungen mit Hilfe von Normen eine große Rolle. Daher sollen einige grundlegende Begriffe kurz wiederholt bzw. eingeführt werden.

Definition 1 (Linearer Vektorraum).
Eine nichtleere Menge $\mathcal{X}$ heißt (linearer) Vektorraum über $\mathbb{C}$, wenn die binären Operationen $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (Addition) und $\cdot : c \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (Multiplikation mit $c \in \mathbb{C}$) den folgenden Axiomen $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ genügen:

(1) *$\mathcal{X}$ ist bzgl. der Addition eine kommutative Gruppe, d.h. es gilt:*

- (I) $x + y = y + x$ *(Kommutativität)*
- (II) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(Assoziativität)*
- (III) $0 + x = x$ *(neutrales Element)*
- (IV) $x + (-x) = 0$ *(inverses Element)*

(2) *Die Multiplikation mit Skalaren $a, b \in \mathbb{C}$ genügt:*

- (I) $a(x + y) = ax + ay$ *(Distributivität I)*
- (II) $(a + b)x = ax + bx$ *(Distributivität II)*
- (III) $(ab)x = a(bx)$ *(Assoziativität)*
- (IV) $1x = x$
- (V) $0x = 0$

Beispiele: der Raum der reellen Matrizen $\mathbb{R}^{m\times n}$; der von den Funktionen $\{1, t, t^2, \ldots\}$ aufgespannte Funktionenraum; oder $\mathbb{F}_2^n$, d.h. der n-dimensionale Vektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$.

Definition 2 (normierter Vektorraum).
Ein normierter Vektorraum ist ein linearer Vektorraum $\mathcal{X}$ über $\mathbb{C}$ mit einer Funktion $\|.\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$, die jedem $x \in \mathcal{X}$ eine nicht-negative Zahl zuordnet, und die folgenden Beziehungen erfüllt:

(1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$ *(Nichtnegativität)*

(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ *(Definitheit)*

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad x, y \in \mathcal{X}$ *(Dreiecksungleichung)*

(4) $\|a\,x\| = |a|\,\|x\| \quad a \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{X}$ *(Homogenität)*

Bemerkung: Beziehung (1) kann aus denen Beziehungen (3) und (4) gefolgert werden. Anstelle von (2) findet man in der Literatur mitunter auch nur die Implikation $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. Die Umkehrung davon und damit die Äquivalenz folgt aber sofort aus Beziehung (4).

Ein normierter Raum besonderen Interesses ist ein Banach-Raum. Hierzu benötigen wir zunächst:

Definition 3 (Cauchy-Folge).
Eine Cauchy-Folge auf einem normierten Vektorraum $\mathcal{X}$ ist eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in \mathcal{X}$, bei der $\forall \varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so existiert, daß

$$\|x_j - x_k\| < \varepsilon \quad \forall j, k \geq N\,.$$

Definition 4 (Banach-Raum).
Ein normierter linearer Vektorraum $\mathcal{X}$ heißt Banach-Raum, wenn er vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchy-Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in \mathcal{X}$ gegen ein $x \in \mathcal{X}$ konvergiert.

Beispiele: siehe Vorlesung