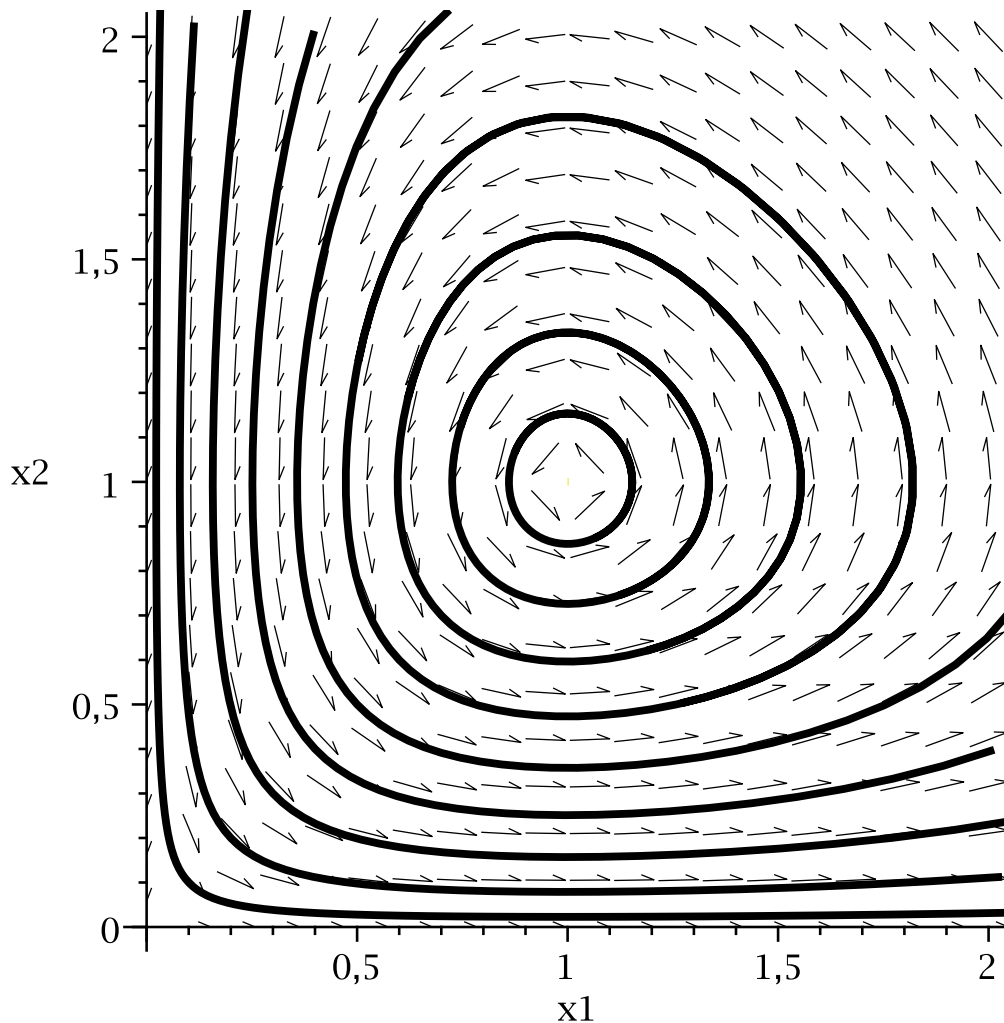


Beiblatt 3: Grenzmengen und Grenzzyklen

Beispiel 1: Untenstehende Abbildung ist das Phasenportrait eines einfachen Räuber-Beute-Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 x_2\end{aligned}$$

mit Beute-Population x_1 und Räuber-Population x_2 ; offensichtlich gilt: $x_1, x_2 > 0$.

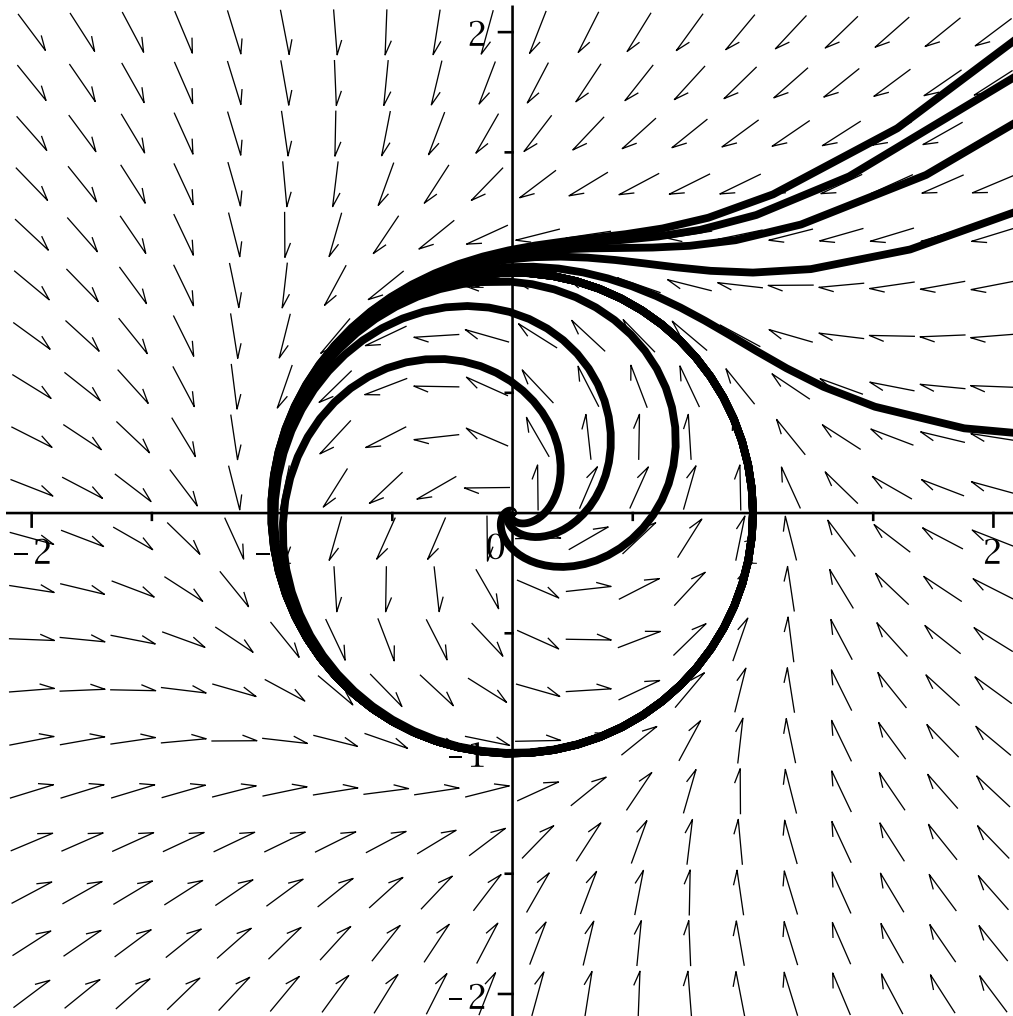


Die Orbits mit Anfangsbedingungen abseits der Koordinatenachsen sind geschlossene Kurven. Ist die Anfangspopulation $x_0^T = (x_{1,0}, x_{2,0})$ so lautet die zeitfreie, implizite Darstellung dieser Orbits:

$$\ln \left(\frac{x_1 x_2}{x_{1,0} x_{2,0}} \right) = x_1 + x_2 - x_{1,0} - x_{2,0}$$

Beispiel 2: Untenstehende Abbildung ist das Phasenportrait des stabilen, nichtlinearen Oszillators

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$



Alle Orbits außerhalb des Einheitskreises (stabiler Grenzzyklus) streben dem Grenzzyklus zu. Innerhalb des Einheitskreises streben mit Ausnahme der instabilen Ruhelage $x_0 = 0$ alle Orbits ebenso dem Grenzzyklus zu.