Beiblatt 6: Beispiel für die Anwendung der Methode des variablen Gradienten

Wir betrachten die Verallgemeinerung des dynamischen Modells eines Pendels

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c_1(x_1) - c_2 x_2 \end{aligned}$$

mit $c_2 > 0$ sowie der Quadrantenbedingung $c_1(0) = 0$ und $x_1\, c_1(x_1) > 0$ für $x_1 \neq 0$ um die Ruhelage. Für den Fall des bereits diskutierten Pendels wäre $c_2 = \frac{d}{MR^2}$ und $c_1(x_1) = \frac{g}{R} \sin x_1$ mit $x_1 \in (-\pi, \pi)$.

Schritt 1: Wir setzen einen variablen Gradienten an als

$$g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{pmatrix}$$

und erfüllen damit die Integrabilitätsbedingungen — hier:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \iff \quad & \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x_2} x_2 + \beta(x) = \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_1} x_1 + \gamma(x) + \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_1} x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Schritt 2: Wir schränken α, β, γ und δ ein, so daß $\dot{V} < 0$, $\forall x \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= g^{\mathrm{T}}(x)\, \dot{x} = \Big(\alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2,\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2\Big) \begin{pmatrix} x_2 \\ -c_1(x_1) - c_2 x_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - c_1(x_1)\gamma(x)x_1 - c_2\gamma(x)x_1x_2 - \delta(x)c_1(x_1)x_2 - c_2\delta(x)x_2^2 \\ &= \Big(\alpha(x)x_1 - c_2\gamma(x)x_1 - \delta(x)c_1(x_1)\Big)x_2 - \Big(c_2\delta(x) - \beta(x)\Big)x_2^2 - \Big(c_1(x_1)x_1\Big)\gamma(x)\,. \end{aligned}$$

Zur Elimination der Koppelterme wählen wir

$$\alpha(x)x_1 - c_2\gamma(x)x_1 - \delta(x)c_1(x_1) = 0 \tag{2}$$

und zur weiteren Vereinfachung die Funktionen δ, β und γ als konstant. Damit folgt zunächst

$$\dot{V} = -(c_2\delta - \beta)x_2^2 - \underbrace{c_1(x_1)x_1}_{>0, \forall x_1 \neq 0} \gamma$$

und damit ist $\dot{V} < 0$, $\forall x \neq 0$ genau dann, wenn

$$c_2\delta - \beta > 0 \tag{3}$$

und

$$\gamma > 0\,. \tag{4}$$

Mit δ, β und γ konstant erhält man aus (1) und (2)

$$\gamma = \beta \tag{5}$$

$$\alpha = \alpha(x_1) = c_2\beta + \delta \frac{c_1(x_1)}{x_1} \tag{6}$$

und schließlich mit (3), (5) und (4) den Ansatz für den Gradienten:

$$g(x) = \begin{pmatrix} c_2\beta x_1 + \delta c_1(x_1) + \beta x_2 \\ \beta x_1 + \delta x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad c_2\delta > \beta > 0\,. \tag{7}$$

Schritt 3: Wir integrieren das Gradientenfeld $g(x)$ entlang der Koordinatenachsen

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^x g^{\mathrm{T}}(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^{x_1} g_1(\bar{x}_1, 0) d\bar{x}_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, \bar{x}_2) d\bar{x}_2 \\
&= \int_0^{x_1} \left(c_2\beta\bar{x}_1 + \delta c_1(\bar{x}_1) \right) d\bar{x}_1 + \int_0^{x_2} \left(\beta x_1 + \delta\bar{x}_2 \right) d\bar{x}_2 \\
&= \frac{1}{2} c_2\beta x_1^2 + \delta \int_0^{x_1} c_1(\bar{x}_1) d\bar{x}_1 + \beta x_1 x_2 + \frac{1}{2}\delta x_2^2 \\
&= \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} c_2\beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} c_1(\bar{x}_1) d\bar{x}_1
\end{aligned}
$$

Diskussion:

- Nach dem in Gleichung (7) gewählten Ansatz gilt $\delta > 0$ und wegen der Quadrantenbedingung ist die Funktion $\delta \int_0^{x_1} c_1(\bar{x}_1) d\bar{x}_1$ positiv definit.
- Die Funktion $x^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} c_2\beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} x$ ist genau dann positiv definit, wenn sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix positiv sind, d.h. sowohl $c_2\beta > 0$ als auch $(c_2\delta - \beta)\beta > 0$ erfüllt ist. Der Ansatz nach Gleichung (7) stellt dies sicher.
- $V(x)$ ist offenbar stetig differenzierbar und $V(x) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.

Damit ist $V = V(x)$ positiv definit.

Fazit: Die Funktion V ist unter der Bedingung $c_2\delta > \beta > 0$ eine Lyapunov-Funktion (z.B. mit $\beta = 1$ und $\delta = 2/c_2$). Nach der direkten Methode von Lyapunov ist $x_{\mathrm{R}} = 0$ somit eine lokal asymptotisch stabile Ruhelage.