Beiblatt 9: Starrkörpersysteme und Robotikgleichung

Zur Modellierung eines mechanischen, aus starren Körpern verbundenen dynamischen Systems (z.B. offene Segmentketten eines Robotors) wählen wir (sogenannte verallgemeinerte) Koordinaten, welche den Energiezustand des gesamten Systems zu jedem Zeitpunkt vollständig beschreiben. Mit diesen Koordinaten sind dann einerseits für jeden starren Körper kinetische wie potentielle Energie zu erfassen, andererseits aber auch der Energiezustand etwa beteiligter Federelemente.

Diese N Koordinaten (man spricht auch von Freiheitsgraden) seien nun in einer vektorwertigen Funktion der Zeit, $q : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^N$, zusammengefaßt. Die gesamte kinetische Energie T des Starrkörpersystems läßt sich dann als quadratische Form in der Geschwindigkeit $\dot{q}$ gemäß

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} D(q)\, \dot{q} \tag{1}$$

mit Hilfe der symmetrischen wie positiv definiten Massenmatrix $D(q)$, i.e.

$$D^{\mathrm{T}}(q) = D(q) > 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

anschreiben.[2] Die gesamte potentielle Energie U des Starrkörpersystems hängt im allgemeinen nur von q, jedoch nicht von Zeitableitungen von q ab, d.h. es gilt

$$U = U(q)\,. \tag{3}$$

Alle *äußeren* Kräfte und Momente lassen sich in die Richtungen der verallgemeinerten Koordinaten projizieren (z.B. mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen). Das können Kräfte (Momente) sein, die kein Potential haben wie z.B. Reibungskräfte oder andere nicht vorgebbare Kräfte, und vorgebbare Antriebskräfte. Sie lassen sich häufig in den verallgemeinerten Koordinaten q und $\dot{q}$ ausdrücken. Man erhält im allgemeinen einen N-dimensionalen Vektor der verallmeinerten Momente

$$Q(q, \dot{q}, u) = B_u(q, \dot{q})\, u + B_0(q, \dot{q})\,. \tag{4}$$

Dabei kann der Vektor u (als Vektor der Stelleingänge) z.B. für Regelungszecke frei vorgegeben werden. Der zweite Summand vereint die nicht vorgebbaren äußeren Kräfte und Momente.

Die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems kann nun auf einfache Weise mit dem Lagrange-Formalismus hergeleitet werden. Hierzu bestimmt man die Lagrange-Funktion

$$L = T - U \tag{5}$$

und erhält durch Differentiation die Bewegungsdifferentialgleichung des Starrkörpersystems die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \ldots, N\,. \tag{6}$$

1 Struktur der Bewegungsdifferentialgleichung

Die Operationen in (6) müssen nicht bei jedem System neu durchgeführt werden. Denn es genügt im wesentlichen die sogenannten Christoffel-Symbole 1. Art aus der Massenmatrix zu berechnen.

Ausgehend von (1) und (3) haben wir ganz allgemein

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} D(q)\, \dot{q} - U(q)\,. \tag{7}$$

[2] Genauer gilt, daß $D(q) - \alpha\, I > 0$ mit $\alpha > 0$, d.h. für die Eigenwerte von $D(q)$ gibt es eine untere, positive Schranke.

Gemäß (6) bestimmen wir den Ausdruck (im weiteren sei $k = 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(D_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}D_{ij}(q)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\dot{q}_i\dot{q}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}D_{ij}(q)\left(\delta_{ik}\dot{q}_j + \delta_{jk}\dot{q}_i\right)\\ =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}D_{kj}(q)\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}D_{ik}(q)\dot{q}_i \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{N}D_{kj}(q)\dot{q}_j \end{aligned} \tag{8}$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_{j=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(D_{kj}(q)\dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j + D_{kj}(q)\ddot{q}_j\,. \tag{9}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U(q)}{\partial q_k}\,. \tag{10}$$

Damit erhalten wir für (6) allgemein

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}D_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial U(q)}{\partial q_k} =& Q_k(q,\dot{q},u)\\ \sum_{j=1}^{N}D_{kj}(q)\ddot{q}_j + \underbrace{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j}_{=\gamma} + \frac{\partial U(q)}{\partial q_k} =& Q_k(q,\dot{q},u)\end{aligned} \tag{11}$$

Einfache Vertauschung der Indizes zeigt, daß sich der Ausdruck γ schreiben läßt als

$$\gamma = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)}_{=\Gamma_{ijk}(q)}\dot{q}_i\dot{q}_j\,. \tag{12}$$

Mit den Christoffel-Symbolen 1. Art

$$\Gamma_{ijk}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k}\right) \tag{13}$$

schreibt sich die Bewegungsdifferentialgleichung nunmehr in der Form

$$\sum_{j=1}^{N}D_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial U(q)}{\partial q_k} = Q_k(q,\dot{q},u)\,. \tag{14}$$

Um eine Matrixdarstellung dieser Gleichung zu bekommen, führen wir die Abkürzungen

$$C_{kj}(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_{ijk}(q)\dot{q}_i \tag{15}$$

und

$$g_k(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q_k} \tag{16}$$

ein und erhalten aus

$$\sum_{j=1}^{N}D_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}C_{kj}(q,\dot{q})\dot{q}_j + g_k(q) = Q_k(q,\dot{q},u) \tag{17}$$

und nach Ersetzung von $Q(q, \dot{q}, u)$ schließlich die in der Robotik übliche Form (Robotikgleichung)

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B_u(q, \dot{q})\, u + B_0(q, \dot{q})\,. \tag{18}$$

Die Robotikgleichung kann man so interpretieren:

Der Ausdruck $C(q, \dot{q})\dot{q}$ entspricht den Zentrifugal- und Corioliskräften, $g(q)$ den Potentialkräften, $B_0(q, \dot{q})$ z.B. Reibkräften und $B_u(q, \dot{q})\, u$ den über Aktoren aufgebrachten Kräften.

Bemerkung: In der Literatur findet man manchmal auch die Darstellung

$$D(q)\ddot{q} + M(q, \dot{q}) = B_u(q, \dot{q})\, u \tag{19}$$

d.h. $B_0(q, \dot{q})$, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ und $g(q)$ von Gleichung (18) sind dann im Vektor $M(q, \dot{q})$ zusammengefaßt. Der Vektor $M(q, \dot{q})$ ist dann offenbar nicht mehr alleine durch die Massenmatrix $D(q)$ festgelegt, d.h. ein Zusammenhang wie in (15) besteht dann nicht.

2 Eigenschaften

Für den Reglerentwurf wichtige Eigenschaften sind:

1. Die Matrix $C(q, \dot{q})$ bestimmt sich gemäß (15) alleine aus den Christoffel-Symbolen 1. Art und ist demnach mit der Massenmatrix $D(q)$ bereits festgelegt. Für den zugehörigen Anteil in der Robotikgleichung gilt
$$\big(C(q, \dot{q})\dot{q}\big)_k = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j\,,$$
woran man z.B. die für Kreiselkräfte typischen Produkte von Geschwindigkeiten erkennt.

2. Die Matrix
$$N(q, \dot{q}) = \dot{D}(q) - 2\, C(q, \dot{q})$$
ist schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $N^{\mathrm{T}} = -N$. Dies kann man leicht zeigen, indem man in C die Ausdrücke für die Christoffel-Symbole einsetzt und dann $N_{ij} = -N_{ji}$ elementweise überprüft.

3. Eine Zustandsdarstellung der Bewegungsdifferentialgleichung erhält man z.B. aus (18) infolge der Wahl von $x_1 = q$ und $x_2 = \dot{q}$. Denn für alle $q \in \mathbb{R}^N$ gilt $D(q) - \alpha\, I > 0$ für ein $\alpha > 0$, d.h. mit (19) dann
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -D^{-1}(x_1)M(x_1, x_2) + D^{-1}(x_1)B_u(x_1, x_2)\, u\,. \end{aligned}$$
Die Zustandsdarstellung ist eingangsaffin und kann mittels $x^{\mathrm{T}} = (x_1^{\mathrm{T}},\, x_2^{\mathrm{T}})$ in die Standardform
$$\dot{x} = f(x) + g(x)\, u$$
der Ordnung $2N$ umgeformt werden. Für diese Systemklasse gibt es eine Vielzahl von Regelungsverfahren, jedoch anders als bei (18) unter Verlust der physikalischen Interpretierbarkeit.