Probeklausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Sommer 2016

Hörsaal 2

Montag, den 08. 08. 2016

Beginn: 10.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
max. Punkte	X	X	X	X	X	XX
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

Untersuchen Sie für folgende Systeme erster Ordnung die lokale bzw. globale Existenz und Eindeutigkeit von stetig differenzierbaren Lösungen zum Anfangsproblem mit Anfangswert $x(0) = 0$:

a) $\dot{x} = -\mathrm{sign}(x)\,\sqrt{|x|}$ b) $\dot{x} = x\,\cos t$ c) $\dot{x} = 1 + x^2$

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 1

Aufgabe 2

Gegeben ist ein nichtlineares Feder-Masse-Dämpfer-System

$$\ddot{y} + c(y) = u(\dot{y}), \quad y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0,$$

wobei $y(t)$ die Position der Masse m zur Zeit t ist, $u(\dot{y})$ ein geschwindigkeitsabhängiges Stellsignal und $c(y) = \frac{2}{\pi}\arctan(y)$ eine nichtlineare Federkraft. Die Masse m ist in u und c enthalten. Die Stellgröße u kann zur aktiven Dämpfung des schwingungsfähigen Systems eingesetzt werden.

Beurteilen Sie mit dem Bendixson-Kriterium, ob im geschlossenen Regelkreis Grenzzyklen ausgeschlossen werden können, wenn

a) $u(t) \equiv 0$ (ohne aktive Dämpfung)

b) $u(t) = -k_0\dot{y}(t)$

c) $u(t) = -k_1\dot{y}(t) - k_2(\dot{y}(t))^3$

d) $u(t) = -(k - |y(t)|)\dot{y}(t)$

mit Koeffizienten $k_0, k_1, k_2 > 0$ und $k \in \mathbb{R}$.

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 2

Aufgabe 3

Wir betrachten das System

$$\dot{x} = -Q\,\phi(x)$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$. $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine symmetrische, positiv definite Matrix und $\phi(x)$ eine stetig differenzierbare, vektorwertige Funktion, deren i-te Komponente ϕ_i allein von x_i abhängt, also $\phi_i = \phi_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Außerdem gelte $\phi_i(0) = 0$ und $x_i\,\phi_i(x_i) > 0$ in einer Umgebung von $x_i = 0$.

a) Finden Sie mit der Methode des variablen Gradienten eine Lyapunov-Funktion, anhand derer ersichtlich ist, daß der Ursprung $x = 0$ asymptotisch stabil ist.

b) Unter welchen Bedingungen ist der Ursprung global asymptotisch stabil?

c) Untersuchen Sie das Beispiel

$$\phi_1(x_1) = x_1 - x_1^2, \qquad \phi_2(x_2) = x_2 + x_2^3, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 3

Aufgabe 4

Betrachten Sie das folgende System erster Ordnung

$$\dot{y} = a\,y + u$$

mit dem unbekannten, aber konstanten, reellen Parameter a. Zur Regelung soll der (dynamische) adaptive Regler

$$u = -k\,y \qquad \text{mit} \quad \dot{k} = \gamma\,y^2, \gamma > 0$$

verwendet werden.

Zeigen Sie mit dem Invarianzprinzip von Krasoskii-LaSalle, daß die Größe y im mit dem adaptiven Regler geschlossenen Regelkreis asymptotisch $y = 0$ zustrebt.

Hinweis: Bei geeigneter Wahl der Zustandsgrößen kann der Ansatz

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2$$

mit $b > a$ als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion herangezogen werden.

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 4

Aufgabe 5

Die Rotationsbewegung eines in Schwerelosigkeit befindlichen Satelliten (starrer Körper) kann mit den sogenannten Kreiselgleichungen modelliert werden:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 \dot{\omega}_1 &= -(\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 + M_1 \\
\Theta_2 \dot{\omega}_2 &= -(\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 + M_2 \\
\Theta_3 \dot{\omega}_3 &= -(\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 + M_3
\end{aligned}$$

Dabei sind $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 > 0$ konstante Massenträgheitsmomente an den Hauptachsen des starren Körpers und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten der Rotationsbewegung um diese Achsen. Stellgrößen sind die von je einem Düsenpaar erzeugten Antriebsmomente M_1, M_2, M_3.

a) Bringen Sie das Modell auf die übliche Darstellung

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q,\dot{q})u$$

und überprüfen Sie Symmetrie und positive Definitheit der Matrix $D(q)$ sowie Schiefsymmetrie der Matrix $\dot{D}(q) - 2\,C(q,\dot{q})$.

b) Nehmen Sie an, die Massenträgheitsmomente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ seien bekannt. Für ω sei eine stetig differenzierbare Solltrajektorie $\omega^\star = \omega^\star(t)$ gegeben.

Bestimmen Sie mit dem computed-torque-Ansatz einen PI-Folgeregler für die Winkelgeschwindigkeiten. Werden eingangsseitige, sprungförmige Störungen stationär ausgeregelt?

c) Die Massenträgheitsmomente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ seien nun nicht mehr bekannt. Entwerfen Sie einen adaptiven Regler, der die Folgeregelungsaufgabe aus Aufgabe b löst.

Hinweis: Überlegen Sie, wie die in der Vorlesung eingeführten Größen s, q_r zu wählen sind.

Weiterer Raum zum Lösen von Aufgabe 5