# Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Winter 2020/2021

Helmholtz-Hörsaal
Samstag, den 24. 04. 2021
Beginn: 12.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

**Modalitäten**

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Abgabe: ________

Zusatzblätter: ____

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 15 | 12 | 13 | 13 | | 43 |
| erreichte Punkte | | | | | | |
| | | | | | Note | |

## Aufgabe 1

**15 Punkte**

Gegeben sei das skalare Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x^4 - 2x^2 =: f(x), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

a) Existiert für das Anfangswertproblem mindestens eine stetig differenzierbare Lösung $x = x(t)$? Ist die Lösung eindeutig?

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.

c) Prüfen Sie die Stabilität der Ruhelagen jeweils mit der indirekten Methode von Lyapunov.

d) Prüfen Sie die Stabilität der Ruhelagen jeweils mit der direkten Methode von Lyapunov. Wählen Sie dabei einen quadratischen Ansatz.

e) Zeichnen Sie (qualitativ) den Graphen von $f$. Markieren Sie die Ruhelagen und zeichnen Sie Richtungspfeile ein. Prüfen Sie jeweils die Stabilität der Ruhelagen anhand des Graphen von $f$.

*Hinweis:* Machen Sie bei den Teilaufgaben c) bis e) deutlich, welche Stabilitätsaussage Sie aufgrund welcher Methode treffen.

## Aufgabe 2

**12 Punkte**

Das lineare System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} x$$

wird mit der nichtlinearen Ausgangsrückführung

$$u = v \,\mathrm{sat}\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} v, & y \geq b \\ \frac{v}{b} y, & -b < y < b \\ -v, & y \leq -b \end{cases}$$

geregelt. Dabei gilt für die in der Sättigungsfunktion verwendeten Konstanten $b > 0$ und $v \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Dynamik des geschlossenen Regelkreises an.

b) Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage (lokal) in Abhängigkeit von $v$.

c) Zeigen Sie mit dem Bendixson-Kriteriums, dass für $\frac{v}{b} \in (-1, 0)$ Grenzzyklen ausgeschlossen werden können.

Wir reduzieren nun die Betrachtung auf einen Zweipunktregler $u = v\,\mathrm{sign}(y)$, entsprechend $b = 0$. In Abbildung 1 (links und rechts) sind die Richtungsfelder für $\underline{u} = 2$ und $\overline{u} = -2$ gezeigt.

d) Zeichnen Sie die Gerade $y = 0$ sowie das Richtungsfeld des geschlossenen Regelkreises für $v = -2$ in Abbildung 1 (Mitte) ein.

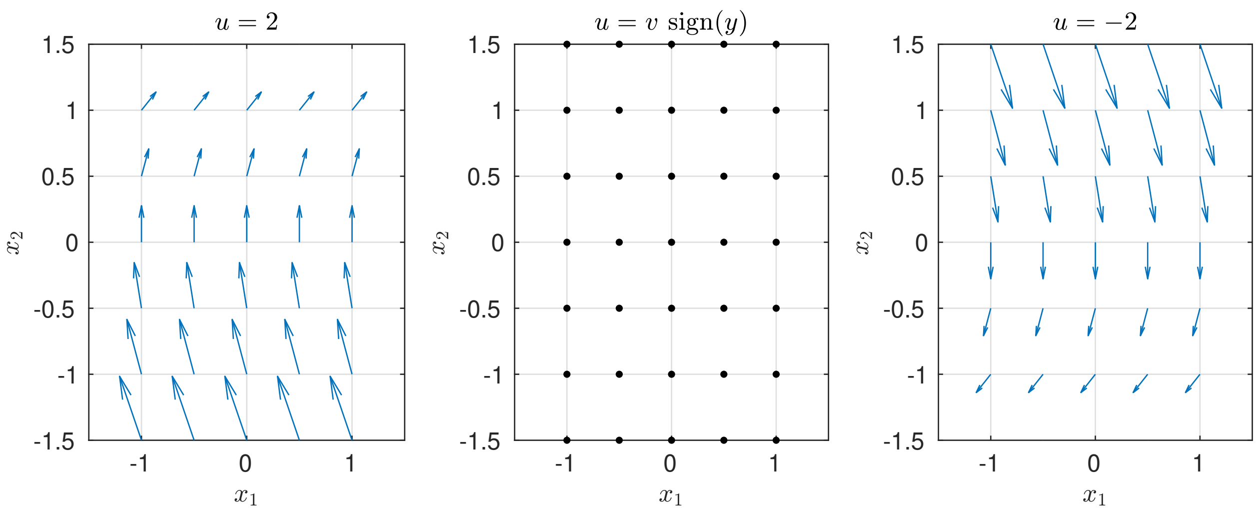


**Abbildung 1:** Richtungsfeld zur Regelung mit einem Zweipunktregler.

## Aufgabe 3

**13 Punkte**

Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left( u + \Theta^\top f(x) \right)$$

mit Parametervektor $\Theta \in \mathbb{R}^p$ und bekannter vektorwertiger Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^p$.

Sei der Parametervektor $\Theta$ zunächst bekannt.

a) Bestimmen Sie den Vektor $k \in \mathbb{R}^2$ im nominalen Regelgesetz $u = k^\top x - \Theta^\top f(x)$ so, dass das geregelte System die Form

$$\dot{x} = \bar{A}\, x$$

annimmt und die Matrix $\bar{A}$ einen doppelten Eigenwert bei $-1$ aufweist.

b) Bestimmen Sie die Lösung $P$ der Lyapunov-Gleichung $\bar{A}^\top P + P\bar{A} + I = 0$ mit Einheitsmatrix $I$.

Sei der Parametervektor $\Theta$ im weiteren unbekannt. Ein Schätzung von $\Theta$ sei mit $\hat{\Theta}$ bezeichnet.

c) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Lyapunov-Gleichung aus Teilaufgabe b) ein Adaptionsgesetz $\dot{\hat{\Theta}} = r(x, \hat{\Theta})$ für das Regelgesetz $u = k^\top x - \hat{\Theta}^\top f(x)$, so dass der Ursprung des geschlossenen Regelkreises stabilisiert wird.

*Hinweis:* Verwenden Sie den Ansatz $V(x, \hat{\Theta}) = x^\top P\, x + \frac{1}{2}(\hat{\Theta} - \Theta)^\top (\hat{\Theta} - \Theta)$.

## Aufgabe 4

**13 Punkte**

Gegeben sei ein Pendel in einer ruhenden Flüssigkeit, welches vereinfacht der folgenden skalaren Bewegungsdifferenzialgleichung mit Auslenkwinkel $q = q(t)$ genügt:

$$\ddot{q} + \sin(q) = u - |\dot{q}|\dot{q}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten quadratischen Lyapunov-Funktion, dass die Zustandsrückführung

$$u(q, \dot{q}) = \sin(q) - K_{\mathrm{P}}(q - q^\star) - K_{\mathrm{D}}\,\dot{q}$$

die Ruhelage $q = q^\star$ asymptotisch stabilisiert. Geben Sie dafür den größtmöglichen Bereich für die Reglerparameter $K_{\mathrm{P}}$ und $K_{\mathrm{D}}$ an.

b) Ist die Stabilitätsaussage auch global?

Im Folgenden soll die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ als sogenannte Dirty-Derivative mittels

$$\dot{\varphi}(t) = q(t) - \varphi(t) =: \omega(t)$$

aus dem gemessenen Auslenkwinkel geschätzt werden.

c) Stellen Sie das System nun mit der dynamischen Ausgangsrückführung $u = u(q, \omega)$ im erweiterten Zustandsraummodell $\dot{x} = f(x)$ mit Zustand $x^\top = (x_1, x_2, x_3)^\top = (q, \dot{q}, \varphi)^\top$ dar.

d) Zeigen Sie unter der Verwendung des Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion

$$V(x) = x^\top P\, x = x^\top \begin{pmatrix} 4.5 & -0.5 & -1.5 \\ -0.5 & 3 & 1.5 \\ -1.5 & 1.5 & 2 \end{pmatrix} x$$

mit Eigenschaft $P^\top = P > 0$, dass für das geregelte System für $K_{\mathrm{P}} = K_{\mathrm{D}} = 1$ die asymptotische Stabilität von $q^\star = 0$ lokal für $|\dot{q}| < 2$ gewährleistet ist.

*Hinweis:* Nutzen Sie die quadratische Ergänzung gemäß $-a^2|a|^2 \mp 2a|a|b - b^2 = -(a|a| \pm b)^2$.